研究紹介 (小島 秀雄)

研究テーマ: アフィン代数多様体の研究

1　代数幾何学

(代数幾何学に関するより詳しい解説が 2013 年 3 月に本学を定年退職された吉原久夫先生の研究紹介にあります。)

多項式は高等学校までの数学でも扱いました。高等学校までで学ぶ数学で, 直線, 円, 放物線, 楕円, 双曲線 (これらは平面内の図形), 平面, 球面 (これらは空間内の図形) を扱いましたが, これらはいずれも多項式 $= 0$ によって定まります。

代数幾何学とは, いくつかの多項式を零にする点からなる図形 (**代数多様体**と呼びます) の様々な性質を調べることを目的としております。多項式であることが大事であり, 例えば, $y = \cos x$ のグラフは平面内の曲線を表しますがこれは多項式 $= 0$ の形で表すことができませんので, 代数多様体ではありません。また, 方程式の解も実数の範囲だけでなく, 複素数の範囲まで広げて考えた方がきれいな性質が成り立つことが分かります。例えば, 方程式 $x^2 + 1 = 0$ は実数の範囲では解を持ちませんが, 複素数まで範囲を広げれば解があります。また, $x^2 + y^2 = -1$ (虚円といいます) は実数の範囲では解を持ちませんが, これも複素数まで範囲を広げると解があることが分かります.

つまり代数多様体とは, n 次元複素アフィン空間 $\mathbb{C}^n$ 内のいくつかの多項式から成る連立方程式の解, つまり,

$$V = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n \ \mid \ f_1(x_1, \ldots, x_n) = \cdots = f_m(x_1, \ldots, x_n) = 0\}$$

という $\mathbb{C}^n$ 内の図形です。 ここで, $f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)$ は複素数を係数とする $x_1, \ldots, x_n$ の多項式です。 (尚, $\mathbb{C}^n$ は n 次元複素ベクトル空間と同じものですが, 代数幾何学では n 次元複素アフィン空間と呼びます。) また, 複素数全体の集合 $\mathbb{C}$ だけでなく, $\mathbb{C}$ をより一般の体という四則演算が自由にできる集合に置き換えても代数多様体を同じように定義することができます。

実は, 前の段落の代数多様体の定義は正確ではありません。前の段落の V は正確にはアフィン代数的集合といい, アフィン代数的集合にもう少し条件をつけたものを**アフィン代数多様体**といい, **代数多様体**とはアフィン代数多様体を何個かある条件をみたすように貼りあわせたものをいいます。あいまいな書き方になってしまい申し訳ありませんが, 代数多様体の正確な定義を紹介するには多くの紙数を必

要とします。詳しくは代数幾何学を学習してもらうしかありません。代数幾何学の入門書はたくさんありますが, そのうちの初歩的なものとして [3], [8], [9], 本格的なものとして, [1], [6], [10] を挙げておきます。

2 アフィン代数多様体と射影代数多様体

代数多様体とはアフィン代数多様体をいくつか貼りあわせたもの, と説明しました。ということは, アフィン代数多様体は最も基本的な代数多様体であると思われます。しかしながら, アフィン代数多様体は非常に扱いの難しいものであることが, 代数幾何学を勉強すると分かります。この理由は色々ありますが, 一番の理由は複素アフィン空間 $\mathbb{C}^n$ の座標変換の方法がたくさんあることだと思います。多項式 $=0$ で定義された図形の変数を変換すると, その多項式の部分は簡単になる場合もありますが見た目がかなり複雑になる場合もあります。 多項式の部分だけをみても元の図形の性質を調べるのは容易ではありません。

この問題を解決するために, 通常はアフィン代数多様体ではなく, それに無限遠集合を付け加えて, 射影空間の中のいくつかの斉次多項式 $=0$ で定義されたもの (これを**射影代数多様体**といいます) を考えます。

例で紹介します。$f(x,y)=x^2+y^2-1$ として, 2 次元複素アフィン空間 (アフィン平面といいます) 内の次のアフィン代数多様体 (この場合はアフィン代数曲線) を考えます。

$$C=\{(x,y)\in\mathbb{C}^2 \mid f(x,y)=0\}$$

C が定義されている方程式 $f(x,y)=0$ の $f(x,y)$ は 2 次の多項式です。このとき, X,Y,Z を新たな変数として,

$$F(X,Y,Z)=Z^{\deg f(x,y)}f\left(\frac{X}{Z},\frac{Y}{Z}\right)$$

とおくと, 今の場合は $\deg f(x,y)=2$ ですので,

$$F(X,Y,Z)=X^2+Y^2-Z^2$$

となり, $F(X,Y,Z)$ の単項式の次数が全て 2 になりました。全ての単項式の次数が同じになる多項式を斉次多項式といい, 多項式 $f(x,y)$ から上の斉次多項式 $F(X,Y,Z)$ を作る操作を $f(x,y)$ の斉次化といいます。この $F(X,Y,Z)$ は斉次多項式なので, $(X:Y:Z)$ を斉次座標とする射影平面 $\mathbb{P}^2$ 内の代数多様体 (代数曲線)

$$\overline{C}=\{(a:b:c)\in\mathbb{P}^2 \mid F(a,b,c)=0\}$$

を定義します。こうしてできる $\overline{C}$ を C の射影化といい, 射影化でできる代数多様体は射影代数多様体と呼ばれます。射影代数多様体はアフィン代数多様体よりも

複雑そうにみえますが, 実はアフィン代数多様体よりもはるかに調べやすい対象です。例えば, 楕円 (円も含みます), 放物線, 双曲線という 3 種類の 2 次曲線は複素数全体の集合 $\mathbb{C}$ 上で考えて更に射影化をすると, 同じもの (射影同値である, といいます) になることが分かります。

アフィン代数多様体よりもそれを射影化した射影代数多様体の方が調べやすいので, 代数幾何学の研究者の殆どは射影代数多様体の方を研究対象としております。それでは, アフィン代数多様体の方は意味がないのかというと, そうではなく, アフィン代数多様体は代数幾何学のテクニックを用いて研究することが難しいというだけで, アフィン代数多様体も重要な研究対象です。

3　アフィン代数幾何学

私は代数幾何学, 特に, **アフィン代数幾何学**という分野を専門にしております。アフィン代数幾何学とは文字通り, アフィン代数多様体の様々な性質を調べることを目標とする分野です。代数幾何学の一分野とみなされることが多いのですが, アフィン代数幾何学は他にも代数学 (可換環論), 幾何学 (トポロジー, 微分幾何学), 解析学 (多変数関数論) と関係があります。

代数幾何学は 20 世紀に最も進展した数学の分野 (の一つ) であり, 研究者の数も多いのですが, アフィン代数幾何学はそれに比べるとマイナーです。ですが, 近年はヨーロッパやアジアを中心に研究者が増えております。アフィン代数幾何学の研究対象はアフィン代数多様体という比較的具体的なものを扱っているため分かりやすいということと, 上にも書いた通り, 代数幾何学だけでなく, 可換環論, トポロジー, 多変数関数論, 微分幾何学等様々な分野のテクニックが使えるということが, 研究者が増えた主な理由です。実際, 元々代数幾何学以外のこれらの分野を専門としていたアフィン代数幾何学の研究者もおります。(むしろ代数幾何学以外の分野出身の方が多いかも知れません。) 日本では代数幾何学の研究者はその数と質共に世界のトップクラスでありますが, アフィン代数幾何学の研究者の数は多くはありませんし, 残念ながらその数も増えてはいない状態です。しかしながら, 永田雅宜先生, 宮西正宜先生, 飯高茂先生等, アフィン代数幾何学の発展に著しく寄与した数学者が出ており, 現在でも日本はアフィン代数幾何学の世界的拠点の一つとなっております。多くの特に若い方がこの分野に参入して下さることを切望しております。

アフィン代数幾何学の研究者が研究している問題は沢山ありますが, 主な研究課題を二つだけ挙げます。

1. アフィン空間の自己同型群の構造を調べよ。

最も単純なアフィン代数多様体はアフィン空間ですが, これは単純なだけにとらえどころがない対象です。アフィン代数幾何学の研究者の多くはこのアフィン空

間と多項式環 (多項式環は (変数の個数を固定した) 多項式全体の集合でこれは多項式の和と積に関して環と呼ばれる対象になります) を研究対象としています。アフィン空間の自己同型群というのは要するに, アフィン空間の座標変換 (これは, 写像の合成に関して群と呼ばれる対象になります) 全体がなす群のことです。アフィン空間の自己同型群については分かっていないことが多く, ヤコビアン予想等, 重要な未解決問題が多くあります。

2. アフィン代数多様体を分類せよ。

私が主に取り組んでいるのはこの問題です。アフィン代数多様体の分類はそれを射影化した射影代数多様体を分類するより難しい問題ですが, 飯高茂先生による対数的小平次元の理論により, アフィン代数多様体も射影代数多様体と同じように分類理論を確立することが可能であることが期待されるようになりました。1 次元アフィン代数多様体は対数的小平次元による構造が分かっており, 2 次元の場合もかなり分かっているのですが, 基礎体が正標数の場合等詳しく分かっていない部分も多くあります。私が取り組んでいるのは 2 次元の場合ですが, 2 次元を完成させてもっと次元の高いものについても調べていこうとしております。

もう少し詳しく説明すると, アフィン代数多様体は射影化により射影代数多様体の部分集合になりますが, このとき, その射影代数多様体と, その射影代数多様体から元のアフィン代数多様体を取り除いた部分の組を考えます。このままでは特異点というあまり性質の良くない部分がありますが, その特異点を解消することにより, その組に対して対数的小平次元を定義することができます。(対数的小平次元とは, 特異点のない射影代数多様体に対して定義される小平次元の概念の類似物です。対数的小平次元の正確な定義はここでは説明できません。申し訳ありません。) 射影代数多様体に付加的な情報を加えて考える, というところが大事なところです。

4 最後に

私の力不足により, 以上の説明ではほとんど分からなかったと思います。(申し訳ありません。) ある程度代数学や代数幾何学の知識がないと, アフィン代数幾何学を研究することは残念ながらできません。アフィン代数幾何学を勉強する方法は色々ありますが, 代数的なアプローチから勉強するためには次のいずれかの流れで行うと良いと思います。

1. 大学数学科の 3 年前期位までで習う代数学, 特に環論の知識を身につけてから, 可換環論の入門書 ([2] 等) を読む。それから, [4] や [5] を読むと (全部読む必要はありません), 研究の最先端に出ることができます。また, 首都大学東京の黒田茂先生の HP にはアフィン代数幾何学に関する講義録が公開され

ており, これは, 可換環論でアフィン代数幾何学に必要な部分だけを勉強できるようになっているので, お勧めです。

2. 代数幾何学の本格的な入門書で代数曲面論の入門までを勉強すると, アフィン代数曲面に関する論文のうちのいくつかを読むことができます。更に, [7] の前半を勉強すると研究の最先端に出ることができます。([7] の初めの 4 分の 1 は代数曲面論の入門になっております。)

参考文献

[1] 安藤哲哉: 代数曲線・代数曲面入門, 数学書房.

[2] M. F. Atiyah, I. G. MacDonald 著, 新妻訳: 可換代数入門, 共立出版.

[3] 海老原 円: 14 日間でわかる代数幾何学事始, 日本評論社.

[4] A. van den Essen: Polynomial Automorphisms, Birkhäuser.

[5] G. Freudenburg: Algebraic Theory of Locally Nilpotent Derivations, Springer.

[6] 堀川頴二: 複素代数幾何学入門, 岩波書店.

[7] M. Miyanishi: Open Algebraic Surfaces, American Mathematical Society.

[8] M. Reid 著, 若林訳: 初等代数幾何学講義, 岩波書店.

[9] 酒井文雄: 平面代数曲線, 共立出版.

[10] 上野健爾: 代数幾何, 岩波書店.