

代数と幾何D (第2回・2007/10/3)

定義 (群の公理). 空でない集合 G 上に二項演算 $\circ$

$$G \times G \longrightarrow G, \quad (a, b) \longmapsto a \circ b$$

が定義され、以下 (G1), (G2), (G3) を満たすとき $(G, \circ)$ を**群**という.

- (G1) **結合法則** 任意の $a, b, c \in G$ に対して, $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ が成り立つ.
 (G2) **単位元の存在** ある $e \in G$ が存在して, 任意の $a \in G$ に対して $a \circ e = e \circ a = a$ が成り立つ.
 (G3) **逆元の存在** 任意の $a \in G$ に対して, ある $a' \in G$ が存在し, $a \circ a' = a' \circ a = e$ が成り立つ.

- [1] G を群とする. $a \in G$ に対し, $aG = \{a \circ g \mid g \in G\}$, $Ga = \{g \circ a \mid g \in G\}$ とする. このとき, $aG = Ga = G$ を示せ. (ヒント $aG = G$ を示すには, $aG \subset G$ かつ $aG \supset G$ を示す)
 [2] 次の集合は群 (有限群) の例である. 群の演算表 (= 群表) はどのようなになるか? 群表を $1, (1), a, b, c, d, e$ を使って, 実際に次の形で書け. (ヒント 群表の各行, 各列には G の各元が1回ずつ現われるので, 全てを計算する必要はない)

	1	a	b	...
1	1	a	b	...
a	a	?		
b	b			
$\vdots$				

又は

	(1)	a	b	...
(1)	(1)	a	b	...
a	a	?		
b	b			
$\vdots$				

但し, 二項演算 $\circ$ は (i), (ii) は通常の積, (iii)-(viii) は置換の積 $(\sigma \circ \tau)(i) = \sigma(\tau(i))$ とする.

- (i) $G = \{1, a, b\}, a = (-1 + \sqrt{-3})/2, b = (-1 - \sqrt{-3})/2$.
 (ii) $G = \{1, a, b, c\}, a = \sqrt{-1}, b = -1, c = -\sqrt{-1}$.
 (iii) $G = \{(1), a, b\}, a = (1\ 2\ 3), b = (1\ 3\ 2)$.
 (iv) $G = \{(1), a, b, c\}, a = (1\ 2\ 3\ 4), b = (1\ 3)(2\ 4), c = (1\ 4\ 3\ 2)$.
 (v) $G = \{(1), a, b, c\}, a = (1\ 2)(3\ 4), b = (1\ 3)(2\ 4), c = (1\ 4)(2\ 3)$.
 (vi) $G = \{(1), a, b, c, d\}, a = (1\ 2\ 3\ 4\ 5), b = (1\ 3\ 5\ 2\ 4), c = (1\ 4\ 2\ 5\ 3), d = (1\ 5\ 4\ 3\ 2)$.
 (vii) $S_3 = \{(1), a, b, c, d, e\}, a = (1\ 2\ 3), b = (1\ 3\ 2), c = (1\ 2), d = (1\ 3), e = (2\ 3)$
 (viii) $G = \{(1), a, b, c\}, a = (1\ 2), b = (3\ 4), c = (1\ 2)(3\ 4)$.

- [3] なぜ群表の各行, 各列には G の各元が1回ずつ現われるのか? 説明せよ. (ヒント 問 [1])
 [4] 問 [2] の (i) - (viii) の内, 同型な群 (= 同じ群表を持つ) をすべて挙げよ.
 [5] 位数3の群は全て同型である. これを, 群表を使って示せ.
 [6] **(単位元, 逆元の一意性)** G を群とする. 次を示せ.
 (i) 任意の $a \in G$ に対し, $a \circ e = e \circ a = a$ を満たす $e \in G$ は唯1つ存在する.
 (ii) 任意の $a \in G$ に対し, $a \circ b = b \circ a = e$ を満たす $b \in G$ は a によって一意的に定まる.
 [7] **(逆演算可能)** G を群とする. 次を示せ.
 (i) 任意の $a, b \in G$ に対し, $a \circ x = b$ を満たす $x \in G$ が唯1つ存在する.
 (ii) 任意の $a, b \in G$ に対し, $y \circ a = b$ を満たす $y \in G$ が唯1つ存在する.
 [8] 半群とは何か? 定義を述べよ. また, 単位的半群 (モノイド) とは何か? (ヒント 群の定義↑)
 [9] $(\mathbb{Z}, +)$ は群である事を示せ. また, $(\mathbb{Z}, \times)$ は群ではないが, 半群である事を示せ.
 [10] 集合 X から X への全単射写像の全体を $S(X)$ とする. $f, g \in S(X)$ に対し, 二項演算 $f \circ g$ を写像の合成 $(g \circ f)(x) := g(f(x)), (\forall x \in X)$ によって定義する. このとき $(S(X), \circ)$ は群である事を示せ. (コメント $X = \{1, 2, \dots, n\}$ の時, $S(X)$ を S_n と書いて n 次対称群と言った)
 [11] このプリントに出ていない, 群 $(G, \circ)$ の例を有限群, 無限群それぞれ挙げよ.