代数と幾何 D（第 9 回・2007/11/28）

命題． H は群 G の部分群とする．$\forall a,b,c\in G$ に対し，$aH=bH \Leftrightarrow (ca)H=(cb)H$, $Ha=Hb \Leftrightarrow H(ac)=H(bc)$.
また，次の (1)〜(4) は同値：(1) $\forall g\in G$ に対し，$gH=Hg$; (2) $\forall a,b,c,d\in G$ に対し，$aH=bH$ かつ $cH=dH \Rightarrow (ac)H=(bd)H$; (3) $\forall g\in G$ に対し，$gHg^{-1}\subset H$; (4) $\forall g\in G$ に対し，$gHg^{-1}=H$.

定義 (正規部分群，剰余類)． 群 G の部分群 H が，$gH=Hg$ $(\forall g\in G)$ を満たすとき，H を G の正規部分群 (normal subgroup) といい，$H\lhd G$ とかく．このとき，左剰余類 gH と右剰余類 Hg は同じものであり，単に 剰余類 という．

定義 (単純群) 群 G の正規部分群が自明群 $\{1\}$ と G 自身のみのとき，G を 単純群 という．

定理． $H\lhd G$ とする．剰余類の集合 $G/H=\{gH \mid g\in G\}$ に対して，$(g_1H)*(g_2H)=(g_1g_2)H$ は二項演算を与え，$(G/H,*)$ は群をなす．群 G/H の単位元は H，gH の逆元は $(gH)^{-1}=g^{-1}H$.

定義 (剰余群，商群)． 群 $(G/H,*)$ を群 G の正規部分群 H による 剰余群 または 商群 という．

例． $(\mathbb{Z},+)$ に対し，$(m\mathbb{Z},+)$ は正規部分群で，$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}=\{[0],[1],\ldots,[m-1]\}=\{\overline{0},\overline{1},\ldots,\overline{m-1}\}$.

命題． $\langle a\rangle$ を位数 m の巡回群とすると，$\langle a\rangle\cong\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

命題． 群 G に指数 2 の部分群 H (指数 $|G:H|=\#G/\#H$) があれば，H は G の正規部分群.

命題． $f:G\to G'$ を群 G から群 G' への準同型写像とする．このとき，次が成立する：(1) $f(1_G)=1_{G'}$, 但し 1_G $(1_{G'})$ は G (G') の単位元；(2) $g\in G$ に対し，$f(g^{-1})=f(g)^{-1}$； (3) $g\in G$ に対して，$\mathrm{ord}(f(g))\,|\,\mathrm{ord}(g)$. 特に，$f$ が単射であれば，$\mathrm{ord}(f(g))=\mathrm{ord}(g)$.

定義． 群 G,G' の単位元を $1_G,1_{G'}$ とする．準同型写像 $f:G\to G'$ に対し，$\mathrm{Ker}f:=\{g\in G \mid f(g)=1_{G'}\}$, $\mathrm{Im}f:=\{f(g)\in G' \mid g\in G\}$ とおく．$\mathrm{Ker}f$ を f の核 (kernel), $\mathrm{Im}f$ を f の像 (image) という．

命題． 群の準同型写像 $f:G\to G'$ に対し，f : 単射 $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Ker}f=\{1_G\}$.

命題． 群の準同型写像 $f:G\to G'$ に対し，(1) $\mathrm{Ker}f\lhd G$ (正規部分群); (2) $\mathrm{Im}f\subset G$；部分群.

定義． $H\lhd G$ に対し，全射準同型写像 $f:G\to G/H$, $g\mapsto gH$ を 標準的な準同型写像 という．

命題． $H\lhd G$ とする．H は標準的な準同型写像 $f:G\to G/H$, $g\mapsto gH$ の核 $\mathrm{Ker}f$ である．

定理 (準同型定理)． 群の準同型写像 $f:G\to G'$ は，同型写像 $\varphi:G/\mathrm{Ker}f\to\mathrm{Im}f$, $g\,\mathrm{Ker}f\mapsto f(g)$ を引き起こす.

---

[1] $M_n(\mathbb{R})$ を実数係数の $n\times n$ 行列全体の集合，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}):=\{A\in M_n(\mathbb{R}) \mid \det(A)\neq 0\}$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}):=\{A\in M_n(\mathbb{R}) \mid \det(A)=1\}$ とする．(1) $\det:\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R}^\times$, $A\mapsto\det A$ は全射準同型写像を示せ．(2) Ker det を求めよ．(3) det に準同型定理を適用すると，どの様な同型が得られるか？

[2] $Q_8=\{\pm1,\pm i,\pm j,\pm k\}$，但し $i^2=j^2=k^2=-1, ij=-ji=k$ とすると，$(Q_8,\cdot)$ は位数 8 の非可換群となる．(1) Q_8 の部分群を全て求め，部分群の包含関係を Hasse 図で表わせ．(3) Q_8 の部分群は全て正規部分群である事を示せ．(4) 剰余群 $Q_8/\{\pm1\}$ と $V_4=\{(1),(1\,2),(3\,4),(1\,2)(3\,4)\}$ は同型を示せ．(コメント：剰余群 G/H は G の部分群と同型とは限らない事が分かる)

[3] 群 G の部分群 H と $\forall a,b,c\in G$ に対し，$aH=bH \Longleftrightarrow (ca)H=(cb)H$ を示せ.

[4] 群 G の正規部分群とはどの様な部分群か？また，単純群とはどの様な群か？

[5] $\langle a\rangle$ を位数 m の巡回群とする．$\langle a\rangle\cong\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ を示せ.

[6] 群 G の指数 2 の部分群は正規部分群を示せ.

[7] $f:G\to G'$ を群 G から群 G' への準同型写像とする．このとき，次を示せ：(1) $f(1_G)=1_{G'}$, 但し 1_G $(1_{G'})$ は G (G') の単位元；(2) $g\in G$ に対し，$f(g^{-1})=f(g)^{-1}$； (3) $g\in G$ に対して，$\mathrm{ord}(f(g))\,|\,\mathrm{ord}(g)$. 特に，$f$ が単射であれば，$\mathrm{ord}(f(g))=\mathrm{ord}(g)$.

[8] 群の準同型写像 $f:G\to G'$ に対し，f : 単射 $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Ker}f=\{1_G\}$ を示せ.

[9] 群の準同型写像 $f:G\to G'$ に対し，(1) $\mathrm{Ker}f\lhd G$ (正規部分群); (2) $\mathrm{Im}f\subset G$；部分群を示せ.