代数と幾何D（第3回小テスト・2007/12/5）

各小問 10 点 (180 点満点)

[1] 群 G の部分群 H と $a \in G$ に対して，$aH = \{ah \mid h \in H\}$ とする．次の (1)〜(4) は同値であることを示せ：(1) $aH = bH$, (2) $a^{-1}b \in H$, (3) $b \in aH$, (4) $a \in bH$.

[2] 次の群はどの様な群か？定義を書け.
(i) 群 G の正規部分群 (ii) 巡回群 (iii) 単純群

[3] (i) 3次対称群 S_3 の $H_1 = \{(1), (12)\}$ による右剰余類分解，左剰余類分解をそれぞれ求めよ.
(ii) 左剰余類の集合 $S_3/H_1 = \{aH \mid a \in S_3\}$ と右剰余類の集合 $H_1 \backslash S_3 = \{Ha \mid a \in S_3\}$ の完全代表系をそれぞれ与えよ.
(iii) H_1 は S_3 の正規部分群か？正規部分群ではないか？

[4] 3次対称群 S_3 の部分群の位数は，**ラグランジュの定理**から S_3 の位数の約数である．S_3 の部分群を全て求め，部分群の包含関係を Hasse 図で表わせ.

[5] n 次交代群 A_n とは $A_n = \{\sigma \in S_n \mid \sigma \text{ は偶置換}\} = \{\sigma \in S_n \mid \mathrm{sgn}(\sigma) = 1\}$ なる S_n の部分群のことであった.

(i) n 次対称群 S_n の n 次交代群 A_n による左剰余類分解を与えよ．また，$\#A_n$ はいくつか？
(ii) 4次交代群 A_4 の全ての元を巡回置換 $(i_1\ i_2\ \cdots i_k)$ の積を使って書き，それぞれの元の位数を求めよ．(例 $A_3 = \{(1), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$，各元の位数はそれぞれ $1, 3, 3$)

[6] 群 G の指数2の部分群 ($|G : H| = 2$) は正規部分群であることを示せ.

[7] 二面体群 D_n とは，平面上の正 n 角形 ($n \geq 3$) を空間内で動かし，自分自身に重ねる変換全体のことであった．時計回りの $(2\pi/n)$ 回転を σ，1つの頂点 n を動かさない裏返しを τ とすれば，$D_n = \{1, \sigma, \ldots, \sigma^{n-1}, \tau, \sigma\tau, \ldots, \sigma^{n-1}\tau\}$，$\#D_n = 2n$ である.

(i) $\sigma, \tau, \sigma\tau$ の位数 $\mathrm{ord}(\sigma)$, $\mathrm{ord}(\tau)$, $\mathrm{ord}(\sigma\tau)$ はそれぞれいくつか？
(ii) $\tau\sigma = \sigma^{-1}\tau$ を示せ．(ヒント $(\sigma\tau)^2 = 1$ を使う)
(iii) $\sigma\tau\sigma^3\tau\sigma\tau$ を D_n の元として $\sigma^i\tau$ の形で書け．(ヒント (ii) を使う)

[8] (i) 二面体群 D_5 の元を全て書き，各元の位数を答えよ.
(ii) D_5 の部分群を全て求め，部分群の包含関係を Hasse 図で表わせ.

[9] H を群 G の部分群，$a \in G$ に対して，$aHa^{-1} := \{a\,x\,a^{-1} \mid x \in H\}$ とする.
(i) $\forall a \in G$ に対し，aHa^{-1} は G の部分群である事を示せ.
(ii) $\forall a \in G$ に対し，$|aHa^{-1}| = |H|$ を示せ.
(iii) H から得られた，新たな G の部分群 aHa^{-1} は，H の共役部分群と呼ばれる．H が G の正規部分群 ($H \lhd G$) $\Longleftrightarrow$ H の共役部分群は H のみ，を示せ.

[10] $C_n = \langle a \rangle$ を位数 m の巡回群，$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ を加法群 $\mathbb{Z}$ の正規部分群 $m\mathbb{Z}$ による剰余群とする．乗法群 $(C_n, \cdot)$ と加法群 $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +)$ は同型であることを示せ.

[11] $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$，但し $i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = -ji = k$ であり，$\{\pm 1\}$ は Q_8 の全ての元と可換とする．このとき，Q_8 は非可換群となり，位数 8 の**四元数群**という.
(i) Q_8 の群表を書け.
(ii) Q_8 の部分群を全て求め，部分群の包含関係を Hasse 図で表わせ.

[12] (i) 四元数群 Q_8(定義は全問参照) の部分群は全て正規部分群である事を示せ.
(ii) 剰余群 $Q_8/\{\pm 1\}$ は Q_8 のどの部分群とも同型ではない事を示せ.

[13] 群 G, G' の単位元をそれぞれ $1_G, 1_{G'}$ とする．群の準同型写像 $f : G \to G'$ に対し，次を示せ.
(i) $f(1_G) = 1_{G'}$,
(ii) $\forall g \in G$ に対し，$f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$,
(iii) $\forall g \in G$ に対し，$\mathrm{ord}(f(g)) \,|\, \mathrm{ord}(g)$,
(vi) f が単射であれば，$\forall g \in G$ に対して，$\mathrm{ord}(f(g)) = \mathrm{ord}(g)$.

[14] 群の準同型写像 $f : G \to G'$ に対し，f : 単射 $\iff$ $\mathrm{Ker} f = \{1_G\}$ (1_G は G の単位元) を示せ.

[15] 群の準同型写像 $f : G \to G'$ に対して，次を示せ.
(i) $\mathrm{Im} f$ は G' の部分群, (ii) $\mathrm{Ker} f$ は G の正規部分群.

[16] $M_2(\mathbb{R})$ を実数係数の 2×2 行列全体の集合，$\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) := \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\}, \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) := \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$ とする．$(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), \cdot)$ は行列の積に関して乗法群となる.
(i) $\det : \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^\times$，$A \mapsto \det A$ は準同型写像であることを示せ.
(ii) $(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}), \cdot)$ は $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), \cdot)$ の正規部分群である事を示せ.

---

[17] (問 **[3]** をより発展させた問題)
S_4 の元を $g_1 = (1), g_2 = (1\ 2\ 3), g_3 = (1\ 3\ 2), g_4 = (1\ 2), g_5 = (1\ 3), g_6 = (2\ 3)$ とおく.
(i) S_4 の $V_4 = \{(1), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$ による左剰余類分解は，$S_4 = g_1V_4 \cup g_2V_4 \cup g_3V_4 \cup g_4V_4 \cup g_5V_4 \cup g_6V_4$ で与えられる事を示せ.
(ii) V_4 は S_4 の正規部分群であることを示せ.
(iii) 剰余群 S_4/V_4 は S_3 と同型を示せ.

[18] (問 **[5]** をより発展させた問題)
(i) 4 次交代群 A_4 には位数 6 の部分群がないことを示せ.
(ii) A_4 の部分群を全て求め，部分群の包含関係を Hasse 図で表わせ ((i) を使ってよい).