代数と幾何D（第4回小テスト(リベンジテスト)・2008/1/9）

各小問10点(150点満点)

[1] 次の群はどの様な群か？定義を書け.
(i) 群Gの正規部分群,
(ii) 単純群.

[2] (i) 3次対称群S_3の$H = \{(1), (12)\}$による右剰余類分解，左剰余類分解をそれぞれ求めよ.
(ii) 左剰余類の集合$S_3/H = \{aH \mid a \in S_3\}$と右剰余類の集合$H\backslash S_3 = \{Ha \mid a \in S_3\}$の完全代表系をそれぞれ与えよ.
(iii) HはS_3の正規部分群か？正規部分群ではないか？

[3] **n次交代群**A_nとは$A_n = \{\sigma \in S_n \mid \sigma$は偶置換$\} = \{\sigma \in S_n \mid \mathrm{sgn}(\sigma) = 1\}$なる$S_n$の正規部分群のことであった.

(i) n次対称群S_nのn次交代群A_nによる左剰余類分解を与えよ．また，$\# A_n$はいくつか？
(ii) 4次交代群A_4の全ての元を巡回置換$(i_1\ i_2\ \cdots i_k)$の積を使って書き，それぞれの元の位数を求めよ．(例 $A_3 = \{(1), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$，各元の位数はそれぞれ$1, 3, 3$)

[4] 群Gの指数2の部分群$(|G : H| = 2)$は正規部分群であることを示せ.

[5] **二面体群**D_nとは，平面上の正n角形$(n \geq 3)$を空間内で動かし，自分自身に重ねる変換全体のことであった．時計回りの$(2\pi/n)$回転をσ，1つの頂点nを動かさない裏返しをτとすれば，$D_n = \left\{1, \sigma, \ldots, \sigma^{n-1}, \tau, \sigma\tau, \ldots, \sigma^{n-1}\tau\right\}$，$\# D_n = 2n$である.

(i) $\sigma, \tau, \sigma\tau$の位数$\mathrm{ord}(\sigma)$, $\mathrm{ord}(\tau)$, $\mathrm{ord}(\sigma\tau)$はそれぞれいくつか？
(ii) 二面体群D_5の元を全て書き，各元の位数を答えよ.
(iii) D_5の部分群を全て求め，部分群の包含関係をHasse図で表わせ.

[6] 群Gの部分群$H \subset G$と元$a \in G$に対し，$aHa^{-1} := \{a\,x\,a^{-1} \mid x \in H\}$とすれば，$H$から新たに$G$の部分群$aHa^{-1}$が得られる．$aHa^{-1}$を$H$**の共役部分群**という.

(i) $\forall a \in G$に対し，aHa^{-1}はGの部分群である事を示せ.
(ii) $\forall a \in G$に対し，$|aHa^{-1}| = |H|$を示せ.
(iii) HがGの正規部分群$(H \lhd G) \iff H$の共役部分群はHのみ，を示せ.

[7] $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$，但し$i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = -ji = k$であり，$\{\pm 1\}$は$Q_8$の全ての元と可換とする．このとき，$Q_8$は非可換群となり，位数8の**四元数群**という.

(i) Q_8の部分群を全て求め，部分群の包含関係をHasse図で表わせ.
(ii) 四元数群Q_8の部分群は全て正規部分群である事を示せ.
(iii) 剰余群$Q_8/\{\pm 1\}$はQ_8のどの部分群とも同型ではない事を示せ.

[8] 群 G, G' の単位元をそれぞれ $1_G, 1_{G'}$ とする．群の準同型写像 $f : G \to G'$ に対し，次を示せ．
(i) $f(1_G) = 1_{G'}$,
(ii) $\forall g \in G$ に対し，$f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$,
(iii) $\forall g \in G$ に対し，$\mathrm{ord}(f(g)) \mid \mathrm{ord}(g)$,
(vi) f が単射であれば，$\forall g \in G$ に対して，$\mathrm{ord}(f(g)) = \mathrm{ord}(g)$.

[9] 群の準同型写像 $f : G \to G'$ に対し，次を示せ．
(i) f : 単射 $\iff$ $\mathrm{Ker} f = \{1_G\}$,
(ii) $\mathrm{Im} f$ は G' の部分群,
(iii) $\mathrm{Ker} f$ は G の正規部分群.

[10] $M_2(\mathbb{R})$ を実数係数の 2×2 行列全体の集合，$\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) := \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\}$, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) := \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$ とする．$(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), \cdot\,)$ は行列の積で乗法群となる．

(i) $\det : \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^\times$, $A \mapsto \det A$ は全射準同型写像であることを示せ．
(ii) $(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}), \cdot\,)$ は $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), \cdot\,)$ の正規部分群である事を示せ．
(iii) 準同型写像 det に準同型定理を適用すると，どの様な同型が得られるか？

[11] 直積 $C_2 \times C_3$ に対し，$C_2 \times C_3 \cong C_6$ を示せ（但し，C_n は位数 n の巡回群）．

[12] 共役作用 $G \times G \to G, (g, x) \mapsto g \circ x := gxg^{-1}$ による軌道 $\mathrm{Orb}_G(x) = \{gxg^{-1} \mid g \in G\}$ を x の**共役類**，共役類 ($x \sim y \iff \exists g \in G$ s.t $y = gxg^{-1}$ による同値類) による類別 $G = C_1 \cup \cdots \cup C_k$ の位数を表わした等式 $|G| = |C_1| + \cdots + |C_k|$ を**類等式**といった．

(i) A_4 の類等式 $12 = 1 + 3 + 4 + 4$ を使って，A_4 には位数 6 の部分群が存在しない事を示せ．
(ii) A_5 の類等式 $60 = 1 + 15 + 20 + 12 + 12$ を使って，A_5 が単純群であることを示せ．

[13] A_4 の部分群を全て求め，その包含関係を Hasse 図で表わせ (問 [**12**](i) と問 [**3**] を使ってよい)．

[14] 乗法群 $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times := \{[a] \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mid (a, n) = 1\}$ の位数 $\varphi(n) = \#(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ を**オイラー関数**といった．各元 $[a]$ に対し $[a]^{\varphi(n)} = [1]$ より，$[a] = [b] \iff a \equiv b \pmod{n}$ に注意すれば，**オイラーの定理** $(a, n) = 1 \Longrightarrow a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ が得られる．

(i) $10^k \equiv 1 \pmod{17}$ となる $k \in \mathbb{N}$ は存在するか？また存在すれば，最小の k を答えよ．
(ii) 109^{900} を 19 で割った余りはいくつか？

[15] **Fact.** $(m, n) = 1 \Longrightarrow (\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})^\times \cong (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ が成り立つ．
これは，**オイラー関数の乗法性** $(m, n) = 1 \Longrightarrow \varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ を示している．

(i) 素数 p に対して，$\varphi(p^r) = p^{r-1}(p-1)$, $(r \in \mathbb{N})$ を示せ．
(ii) 上記のオイラー関数の乗法性と (i) を使って，$\varphi(19), \varphi(38), \varphi(60), \varphi(720)$ を計算せよ．
（つまり，$(\mathbb{Z}/19\mathbb{Z})^\times, (\mathbb{Z}/38\mathbb{Z})^\times, (\mathbb{Z}/60\mathbb{Z})^\times, (\mathbb{Z}/720\mathbb{Z})^\times$ は位数がいくつの乗法群か？）