代数と幾何 D（第 2 回小テスト・2007/11/14）

各小問 10 点 (150 点満点)

[1] 群の定義を書け．(群とは空でない集合で，どのような条件を満たすものか？二項演算，条件 $(G1), (G2), (G3)$ の内容を詳しく説明する)

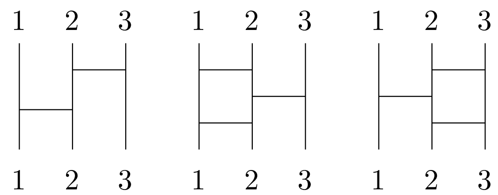
[2] 次の置換は偶置換か奇置換かを答えよ．

(i) $(1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ (ii) $(1\ 2\ 3) \circ (4\ 5)$ (iii) $\Big((1\ 2\ 3) \circ (1\ 4)\Big)^{-1}$

[3] (i) 次の置換に対応するあみだくじを書け．但し，横棒の数を出来る限り少なくすること．(横棒の数が最小本数の人にはボーナス点が加算される)

(i)-1 $(1\ 2\ 3\ 5\ 4)$ (i)-2 $(1\ 3\ 5\ 4\ 2)$ (i)-3 $(1\ 5\ 3\ 4\ 2)$

例 $(1\,2\,3)$ $(1\,3)$ $(1\,3)$



(ii) (i)-3 のあみだくじの最小本数は何本か？

(iii) (ii) が最小本数である理由を「偶置換」「奇置換」を用いて説明せよ．

[4] G を有限群とする．$a \in G$ に対し，$\langle a \rangle := \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ であった．以下を示せ．

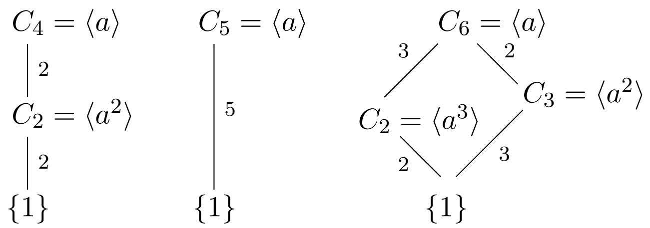
(i) $\mathrm{ord}(a) = \#\langle a \rangle$

(ii) $a \in G$ に対し，$\langle a \rangle$ は G の部分群である．

(iii) $\langle a \rangle$ は可換群である．

[5] $C_n = \langle a \rangle$ を位数 n の巡回群とする．$n = 8, 9, 10, 12, 16$ に対し，C_n の部分群を全て求め，その包含関係を Hasse 図を用いて表わせ．

例 (Hasse 図)



[6] (i) 3 次対称群 $S_3 = \{(1), a, b, c, d, e\}, a = (1\ 2\ 3), b = (1\ 3\ 2), c = (1\ 2), d = (1\ 3), e = (2\ 3)$ の群表を (1), a, b, c, d, e を使って，次の形で書け．

$\circ$	(1)	a	b	$\cdots$
(1)	(1)	a	b	$\cdots$
a	a	?		
b	b			
$\vdots$				

(ii) S_3 の部分群を全て求め，包含関係を Hasse 図を用いて表わせ．(ヒント (i) を使う)

[7] (i) 群 $(G, \circ)$ から群 $(G', *)$ への準同型写像 $f : G \longrightarrow G'$ とは，どのような条件を満たす写像か？その定義を書け．

(ii) 群 $(G, \circ)$ から群 $(G', *)$ への同型写像 $f : G \longrightarrow G'$ とは何か？その定義を書け．

[8] 有限群 G, G' に対し，同型写像 $f : G \longrightarrow G'$ が存在するとする．すなわち，G と G' は同型 $(G \cong G')$ であるとする．このとき，以下を示せ．
(i) 同型写像 f の逆写像もまた同型写像である．
(ii) $\forall a \in G$ に対し，$f(a^n) = f(a)^n$.
(iii) $\forall a \in G$ に対して，$\mathrm{ord}(a) = \mathrm{ord}(f(a))$.
(iv) G が可換群ならば G' も可換群．($\forall a, b \in G$ に対し，$ab = ba$ ならば $f(a)f(b) = f(b)f(a)$)

[9] (i) 2つの位数 n の巡回群 $C_n = \langle a \rangle, C'_n = \langle b \rangle$ は同型となる事を，準同型写像を用いて示せ．
(ii) 位数4の巡回群 $C_4 = \langle a \rangle = \{1, a, a^2, a^3\}$ と $V_4 = \{(1), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$ は同型ではない事を示せ．(ヒント 問 [**8**](iii))
(iii) 3次対称群 S_3 と位数6の巡回群 $C_6 = \langle a \rangle = \{1, a, a^2, a^3, a^4, a^5\}$ は同型でない事を示せ．

---

[10] n 次交代群 A_n とは $A_n = \{\sigma \in S_n \mid \sigma \text{ は偶置換}\} = \{\sigma \in S_n \mid \mathrm{sgn}(\sigma) = 1\}$ なる S_n の部分群のことであった．

(i) 4次交代群 A_4 の各元を巡回置換 $(i_1\ i_2\ \cdots i_k)$ の積を使って書け．
(例 $A_3 = \{(1), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$, $\#A_3 = 3$)
(ii) 4次交代群 A_4 の位数はいくつか？
(iii) 5次交代群 A_5 の位数はいくつか？

[11] 二面体群 D_n とは，平面上の正 n 角形 $(n \geq 3)$ を空間内で動かし，自分自身に重ねる変換全体のことであった．時計回りの $(2\pi/n)$ 回転を σ，1つの頂点 n を動かさない裏返しを τ とすれば，$D_n = \{1, \sigma, \ldots, \sigma^{n-1}, \tau, \sigma\tau, \ldots, \sigma^{n-1}\tau\}$, $\#D_n = 2n$ である．

(i) $\sigma, \tau, \sigma\tau$ の位数 $\mathrm{ord}(\sigma), \mathrm{ord}(\tau), \mathrm{ord}(\sigma\tau)$ はそれぞれいくつか？
(ii) $\tau\sigma = \sigma^{-1}\tau$ を示せ．(ヒント (i) を使う)
(iii) $\sigma\tau\sigma^2\tau\sigma\tau$ を D_n の元として $\sigma^i\tau$ の形で書け．(ヒント (ii) を使う)

[12] (i) $D_n = \langle \sigma, \tau \rangle$ を示せ．(ヒント 問 [**11**](ii), (iii))
(ii) 二面体群 D_3 と3次対称群 S_3 は同型となるか？
(iii) 二面体群 D_n(位数 $2n$) と巡回群 C_{2n}(位数 $2n$) は同型か？

---

[13] G を有限群とする．$a, b, c \in G$ に対し，次を示せ．(ヒント (iii) は (ii) を繰り返し使う)
(i) $\mathrm{ord}(a) = \mathrm{ord}(a^{-1})$, (ii) $\mathrm{ord}(ab) = \mathrm{ord}(ba)$, (iii) $\mathrm{ord}(abc) = \mathrm{ord}(cab) = \mathrm{ord}(bca)$.

[14] H を群 G の部分群とする．$a \in G$ に対して，$aHa^{-1} := \{a\,x\,a^{-1} \mid x \in H\}$ は G の部分群であり，また $|H| = |aHa^{-1}|$ を示せ．(H から得られた新たな G の部分群 aHa^{-1} は，H の共役部分群と呼ばれている)

[15] $M_n(\mathbb{R})$ を実数係数の $n \times n$ 行列全体の集合，$\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\}$, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$, $H := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{R}^\times, b \in \mathbb{R} \right\}$ とする．このとき，$(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), \cdot\,)$ は行列の積 $(\cdot)$ に関して群となる．
(i) $(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}), \cdot\,)$ は $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), \cdot\,)$ の部分群である事を示せ．
(ii) $(H, \cdot\,)$ は $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), \cdot\,)$ の部分群である事を示せ．