

# 代数と幾何 D (第1回小テスト解答・2007/10/24)<sup>1</sup>

各小問 10 点 (100 点満点)

[1] < 4+3+3 点 > (i)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$  (ii)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$  (iii)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

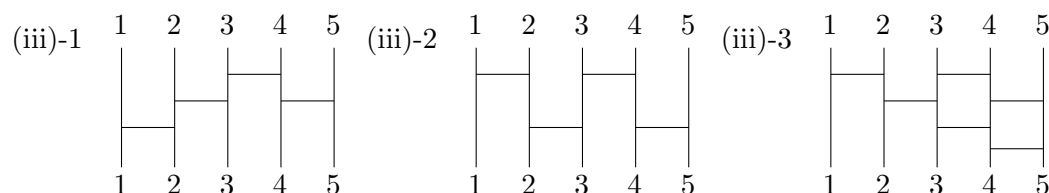
[2] < 4+3+3 点 > (i) (1 2 3 4 5) (ii) (1 2 3)(4 5) (iii) (1 5)(2 3 4)

[3] < 4+3+3 点 > (i) (1 2 3 4) (ii) (1 2 3 4 5) (iii) (1 3 5 4 2)

[4] < 各 2 点+ボーナス各 3 点 >

(i)  $(1\ 2\ \cdots\ r-1\ r) \circ (r\ r+1\ \cdots\ n-1\ n)$   
 $= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & r-1 & r & r+1 & \cdots & n \\ 2 & 3 & \cdots & r & 1 & r+1 & \cdots & n \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & r-1 & r & r+1 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & r-1 & r+1 & r+2 & \cdots & r \end{pmatrix}$   
 $= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & r-1 & r & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & r & r+1 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix} = (1\ 2\ \cdots\ n)$

(ii)  $(j_1\ j_2\ \cdots\ j_r) = (j_1\ j_2)(j_2\ j_3)\cdots(j_{r-1}\ j_r)$



[5] < 10 点 > 空でない集合  $G$  上に二項演算  $\circ : G \times G \longrightarrow G$ ,  $(a, b) \longmapsto a \circ b$  が定義され, 次の 3 つの条件 (G1), (G2), (G3) を満たすとき  $(G, \circ)$  を群という.

(G1) 結合法則 任意の  $a, b, c \in G$  に対して,  $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$  が成り立つ.

(G2) 単位元の存在 ある  $e \in G$  が存在して, 任意の  $a \in G$  に対して  $a \circ e = e \circ a = a$  が成り立つ.

(G3) 逆元の存在 任意の  $a \in G$  に対して, ある  $a' \in G$  が存在し,  $a \circ a' = a' \circ a = e$  が成り立つ.

[6] < 各 2 点 >

|     |         |     |     |     |     |      |         |     |     |     |     |       |         |     |     |     |     |
|-----|---------|-----|-----|-----|-----|------|---------|-----|-----|-----|-----|-------|---------|-----|-----|-----|-----|
|     | $\cdot$ | 1   | $a$ | $b$ | $c$ |      | $\circ$ | (1) | $a$ | $b$ | $c$ |       | $\circ$ | (1) | $a$ | $b$ | $c$ |
|     | 1       | 1   | $a$ | $b$ | $c$ |      | (1)     | (1) | $a$ | $b$ | $c$ |       | (1)     | (1) | $a$ | $b$ | $c$ |
| (i) | $a$     | $a$ | $b$ | $c$ | 1   | (ii) | $a$     | $a$ | $b$ | $c$ | (1) | (iii) | $a$     | $a$ | (1) | $c$ | $b$ |
|     | $b$     | $b$ | $c$ | 1   | $a$ |      | $b$     | $b$ | $c$ | (1) | $a$ |       | $b$     | $b$ | $c$ | (1) | $a$ |
|     | $c$     | $c$ | 1   | $a$ | $b$ |      | $c$     | $c$ | (1) | $a$ | $b$ |       | $c$     | $c$ | $b$ | $a$ | (1) |

|      |         |     |     |     |     |     |         |     |     |     |     |     |     |
|------|---------|-----|-----|-----|-----|-----|---------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
|      | $\circ$ | (1) | $a$ | $b$ | $c$ |     | $\circ$ | (1) | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ |
|      | (1)     | (1) | $a$ | $b$ | $c$ |     | (1)     | (1) | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ |
| (iv) | $a$     | $a$ | (1) | $c$ | $b$ | (v) | $a$     | $a$ | $b$ | (1) | $d$ | $e$ | $c$ |
|      | $b$     | $b$ | $c$ | (1) | $a$ |     | $b$     | $b$ | (1) | $a$ | $e$ | $c$ | $d$ |
|      | $c$     | $c$ | $b$ | $a$ | (1) |     | $c$     | $c$ | $e$ | $d$ | (1) | $b$ | $a$ |
|      |         |     |     |     |     |     | $d$     | $d$ | $c$ | $e$ | $a$ | (1) | $b$ |
|      |         |     |     |     |     |     | $e$     | $e$ | $d$ | $c$ | $b$ | $a$ | (1) |

[7] < 4+3+3 点 > (i) 位数 3 の群  $G = \{1, a, b\}$  の群表は  $\begin{array}{c|ccc} \circ & 1 & a & b \\ \hline 1 & 1 & a & b \\ a & a & ? & \\ b & b & & \end{array}$  の形となる. 各行各列には  $G$  の

元が 1 回ずつ現われ,  $?$  は  $a$  ではない.  $?$  を 1 とすると  $?$  の右が  $b$  となり不可能である. よって  $?$  は  $b$  で

あり, 残りの部分も自動的に決まる. これより, 位数 3 の群の群表は必ず  $\begin{array}{c|ccc} \circ & 1 & a & b \\ \hline 1 & 1 & a & b \\ a & a & b & 1 \\ b & b & 1 & a \end{array}$  の形となる.

<sup>1</sup>Web 版 (得点分布等の一部情報を削除)

[7] (ii) [6] の (ii) における  $G = \{(1), a, b, c\}$  の群表と  $\{a, b, c\}$  を並び替えた群表を書いてみると：

| ○   | (1) | a   | b   | c   | ○   | (1) | a   | c   | b   | ○   | (1) | b   | a   | c   |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| (1) | (1) | a   | b   | c   | (1) | (1) | a   | c   | b   | (1) | (1) | a   | b   | c   |
| a   | a   | b   | c   | (1) | a   | a   | b   | (1) | c   | b   | b   | (1) | c   | a   |
| b   | b   | c   | (1) | a   | c   | c   | (1) | b   | a   | a   | a   | c   | b   | (1) |
| c   | c   | (1) | a   | b   | b   | b   | c   | a   | (1) | c   | c   | a   | (1) | b   |

| ○   | (1) | c   | a   | b   | ○   | (1) | b   | c   | a   | ○   | (1) | c   | b   | a   |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| (1) | (1) | a   | c   | b   | (1) | (1) | b   | c   | a   | (1) | (1) | a   | b   | a   |
| c   | c   | b   | (1) | a   | b   | b   | (1) | a   | c   | c   | c   | b   | a   | (1) |
| a   | a   | (1) | b   | c   | c   | c   | a   | b   | (1) | b   | b   | a   | (1) | c   |
| b   | b   | a   | c   | (1) | a   | a   | c   | (1) | b   | a   | a   | (1) | c   | b   |

これらは全て同じ群  $G$  の群表であり，上の 6 つの内どれか 1 つと同じ形の群表を持つ群  $G'$  は  $G$  と同型である ( $G$  と  $G'$  が同型とは，元の順番を適当に並び替えた後，同じ形の群表を持つ事と定義した)． $G'$  として [6] の (iii) を取れば，上の 6 つとは全て異なる形である．よって  $G$  と  $G'$  は同型ではない．

(ii) (別解) 群  $G = \{a_1, \dots, a_n\}$  の群表に対し，元の順番を適当に並び替えた後の群表には，左上から右下への対角線上の元  $\{a_1^2, \dots, a_n^2\}$  の並び替えが起こる．[6] の (ii) の対角線の成分は  $\{(1), b, (1), b\}$ ，[6] の (iii) の対角線の成分は  $\{(1), (1), (1), (1)\}$  である事から，どう並び替えても群表は一致しない．

(iii) (i) と (ii)，(iii) と (iv)

[8] < 5+5 点 > (i)  $G = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  とする． $G$  の群表の各行には上から  $a_1G, a_2G, \dots, a_nG$ ，各列には左から  $Ga_1, Ga_2, \dots, Ga_n$  が並ぶ．よって  $G = aG = Ga$  ( $\forall a \in G$ ) より，群表の各行，各列には  $G$  の元が 1 回ずつ現われる．

(ii) 集合  $G = \{1, a, b, c\}$  に二項演算を左下の演算表により定義すると，消去律は成り立たない．すなわち， $a \circ c = b \circ c = a$  であるが， $a \neq b$  である．

| ○ | 1 | a | b | c |
|---|---|---|---|---|
| 1 | a | a | a | a |
| a | a | a | a | a |
| b | a | a | a | a |
| c | a | a | a | a |

| ○  | 1  | -1 | 0 |
|----|----|----|---|
| 1  | 1  | -1 | 0 |
| -1 | -1 | 1  | 0 |
| 0  | 0  | 0  | 0 |

(別解) 半群  $(G, \cdot), G = \{1, -1, 0\}$  を取れば，演算表は右上となり，消去律は成り立たない．なぜなら， $1 \cdot 0 = -1 \cdot 0 = 0$  であるが， $1 \neq -1$  である．

[9] < 5+5 点 > (単位元，逆元の一意性)  $G$  を群とする．

(i)  $e, e' \in G$  が，任意の  $a \in G$  に対し， $a \circ e = e \circ a = a$  — ， $a \circ e' = e' \circ a = a$  — を満たすとして， $e = e'$  を示す． $e = e'$  で  $a = e'$ ， $e = e$  とすれば， $e' = e \circ e' = e$  を得る．

(ii)  $b, b' \in G$  が，任意の  $a \in G$  に対し， $a \circ b = b \circ a = e$  — ， $a \circ b' = b' \circ a = e$  — ，を満たすとして， $b = b'$  を示す． $e$  に左から  $b'$  をかけると， $b' \circ (a \circ b) = b' \circ e = b'$  — を得る．また，結合律より  $b' \circ (a \circ b) = (b' \circ a) \circ b = e \circ b = b$  — となる． $b = b'$  より， $b = b'$  が従う．

[10] < 10 点 > 集合  $X$  から  $X$  への全単射写像の全体を  $S(X)$  とする． $f, g \in S(X)$  に対し，二項演算  $f \circ g$  を写像の合成  $(g \circ f)(x) := g(f(x))$ ，( $\forall x \in X$ ) によって定義すれば， $(S(X), \circ)$  は以下 (G1), (G2), (G3) を満たし，群となる．

(G1) 結合法則  $\forall f, g, h \in S(X)$  に対し， $(f \circ (g \circ h))(x) = f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x)))$ ， $((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x)))$ ．

(G2) 単位元の存在 恒等写像  $e \in S(X)$  は単位元となる．すなわち，任意の  $f \in S(X)$  に対して  $f \circ e = e \circ f = f$  を満たす．

(G3) 逆元の存在 全単射より，任意の  $f \in S(X)$  に対して，逆写像  $f^{-1} \in S(X)$  が存在し  $f$  の逆元となる．すなわち， $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = e$  を満たす．