位相空間論A（第3回小テスト・2008/06/27）

各問 10 点 (問 [**1**]–[**20**])

次の問の中から，各自適当な (=勉強してきた) 問題を選んで解答せよ．(100 点以上もカウント)

順番通りに解く必要はない．また，解こうとする問より以前の問は (示せたとして) 使ってよい．

([**1**]–[**3**],[**8**],[**9**],[**15**] は定義を答える問題, [**12**],[**13**] は答えのみでよい問題)

[**1**] 空でない集合 X 上の距離 (関数) の定義を書け ((D1),(D2),(D3) の内容を詳しく説明する)．
(距離 d が定義された集合 X を距離空間といい，(X,d) で表すのであった．)

> **定義 (ε-近傍)．** 距離空間 (X,d) の点 $a \in X$ と $\varepsilon > 0$ に対して，$B_d(a;\varepsilon) := \{x \in X \mid d(x,a) < \varepsilon\}$ を**点** $a \in X$ **の** ε**-近傍**といった．距離 d を省略して，$B(a;\varepsilon) = B_d(a;\varepsilon)$ とも書く．

[**2**] 距離空間 (X,d) の開集合 U, 閉集合 F の定義をそれぞれ書け．
(ヒント 1. 部分集合 $U \subset X$ が X の開集合であるとは $\cdots$, 2. F の補集合は $F^c := X - F$)

[**3**] 距離空間 (X,d)，部分集合 $A \subset X$ に対して，点 $x \in X$ が A の内点，A の外点，A の境界点であるとはどういう事か？その定義をそれぞれ書け．

> **定義 (A の内部，外部，境界)．** 距離空間 (X,d)，部分集合 $A \subset X$ に対して
> A の内点 (外点, 境界点) 全体の集合を A の**内部 (外部, 境界)** といい，A^i (A^e, A^f) で表す．

以下，問 [**4**]–[**10**] において，

(X,d) を距離空間，$A, B \subset X$ を部分集合とする．

[**4**] (i) A は X の開集合 $\iff$ $A = A^i$,　(ii) $A \subset B \Longrightarrow A^i \subset B^i$, を示せ．
(ヒント 開集合の定義さえ書ければ，すぐに示せる)

[**5**] A^i は X の開集合であることを示せ．
(ヒント 問 [**4**](i) を用いて，$(A^i)^i = A^i$ を示す)

[**6**] A^i は X の開集合である (問 [**5**])．さらに A^i は A に含まれる最大の開集合であることを示せ．
(ヒント　$U \subset X$; 開集合に対して，$U \subset A \Longrightarrow U \subset A^i$ を示せばよい)

[**7**] $(A \cap B)^i = A^i \cap B^i$ を示せ．
(ヒント 問 [**4**](ii) を使って $\subset$ を，問 [**6**] を使って $\supset$ を示す)

[**8**] 点 $x \in X$ が A の触点，A の集積点，A の孤立点であるとはどういう事か？定義をそれぞれ書け．

[**9**] A の閉包 $\overline{A}$, A の導集合 A^d とはどのような集合か？その定義をそれぞれ答えよ．

[**10**] X は X の開集合の定義を満たし ($\Leftrightarrow X^i = X$)，また $A^i \subset A$ であるから，問 [**5**], [**7**] と合わせると，次の定理 1 が得られたことになる．

> **定理 1 (内部の性質)．** 距離空間 (X,d)，部分集合 $A, B \subset X$ に対して，次が成り立つ：
> $(\mathrm{I_i})$ $X^i = X$, $(\mathrm{I_{ii}})$ $A^i \subset A$, $(\mathrm{I_{iii}})$ $(A \cap B)^i = A^i \cap B^i$, $(\mathrm{I_{iv}})$ $(A^i)^i = A^i$.

さらに，次の補題を定理 1 に適用し，定理 2 を示せ．(補題は示さなくてよい)

> **補題 (A^i と $\overline{A}$ の双対性)．** 距離空間 (X,d)，部分集合 $A \subset X$ に対して，
> $(\overline{A})^c = (A^c)^i$ が成り立つ．これより，特に $\overline{A} = ((A^c)^i)^c$, $\overline{A^c} = (A^i)^c$, $A^i = (\overline{A^c})^c$.

> **定理 2 (閉包の性質)．** 距離空間 (X,d)，部分集合 $A, B \subset X$ に対して，次が成り立つ：
> $(\mathrm{K_i})$ $\overline{\emptyset} = \emptyset$, $(\mathrm{K_{ii}})$ $A \subset \overline{A}$, $(\mathrm{K_{iii}})$ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $(\mathrm{K_{iv}})$ $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

---

[11] 定理 1 ($\mathrm{I}_{\mathrm{iii}}$) は $\cap$ を $\cup$ に取り替えると，一般には成り立たないことを示せ．
(ヒント　反例 (つまり，$(A \cup B)^i \neq A^i \cup B^i$ となる例) を 1 つ挙げればよい)．

[12] ユークリッド空間 $(\mathbb{R}, d_2)$，部分集合 $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ に対して，$\mathbb{Q}^i$, $\mathbb{Q}^e$, $\mathbb{Q}^f$ を求めよ．
(答えのみでよい)

[13] ユークリッド空間 $(\mathbb{R}, d_2)$，部分集合 $A = \{1/n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ に対して，
A^i, A^e, A^f, $\overline{A}$, A^d, $\{A$ の孤立点$\}$ を求めよ．(答えのみでよい)

[14] 距離空間 (X, d)，部分集合 $A \subset X$ に対して，次を示せ：(ヒント　背理法)
$x \in X$ が A の集積点 $\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0$ に対して，$B(x; \varepsilon)$ は A の点を無数に含む．

---

[15] 距離空間 (X, d)，部分集合 $A \subset X$ に対して，A の点列 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ がコーシー列 (基本列) であるとはどういうことか？その定義を書け．また，X が完備であるとは？その定義を書け．

定義 (直積距離空間)． n 個の距離空間 $(X_1, d_1), \ldots, (X_n, d_n)$ に対して，
直積集合 $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ の 2 点 $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ の間の距離を

$$d^\times(x, y) := \sqrt{d_1(x_1, y_1)^2 + \cdots + d_n(x_n, y_n)^2}$$

によって定義すれば，$(X, d^\times)$ は距離空間となる (問 **[16]**)．$(X, d^\times)$ を $(X_1, d_1), \ldots, (X_n, d_n)$ の**直積距離空間**といい，$(X, d^\times) = (X_1, d_1) \times \cdots \times (X_n, d_n)$ と表す．

[16] 直積距離空間 $(X, d^\times) = (X_1, d_1) \times \cdots \times (X_n, d_n)$ は，実際に，距離空間であることを示せ．
但し，シュワルツの不等式から得られていた，次の Minkowski の不等式は証明なしで用いてよい：任意の $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ に対して，$\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}$.

[17] 次の定理 3 を示せ．

定理 3． 直積距離空間 $(X, d^\times) = (X_1, d_1) \times \cdots \times (X_n, d_n)$ の点列 $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ に対して，
各 x_i を $x_i = (x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \ldots, x_i^{(n)}) \in X$ とする．このとき，次は同値である：
(i) X の点列 $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ は点 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in X$ に収束する，
(ii) 各 $k = 1, 2, \ldots, n$ に対して，X_k の点列 $\{x_i^{(k)}\}_{i \in \mathbb{N}}$ は $\alpha_k \in X_k$ に収束する．

[18] 次の定理 4 を示せ．(ヒント 定理 3 を用いてよい)

定理 4． 完備距離空間 $(X_1, d_1), \ldots, (X_n, d_n)$ の直積距離空間 $(X_1, d_1) \times \cdots \times (X_n, d_n)$ は完備．

定義 (連続写像)． 距離空間 (X, d), (X', d') に対して，写像 $f : X \to X'$ が**点** $a \in X$ **で連続**
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall \varepsilon > 0$ に対して，$\exists \delta > 0$ s.t. $\forall x \in X$ に対して，$d(x, a) < \delta \Longrightarrow d'(f(x), f(a)) < \varepsilon$
$\Longleftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ に対して，$\exists \delta > 0$ s.t. $f(B_d(a; \delta)) \subset B_{d'}(f(a); \varepsilon)$.
写像 $f : X \to X'$ が任意の点 $a \in X$ で連続であるとき，f は X 上の**連続写像**という．

定理 5 (開集合，閉集合による連続写像の特徴付け)． 距離空間 (X, d)，(X', d')，
写像 $f : X \to X'$ に対して次の 3 つの条件 (i),(ii),(iii) は同値である：
(i) f は X 上の連続写像,
(ii) X' の任意の開集合 U に対して，f による U の逆像 $f^{-1}(U)$ は X の開集合である;

$$\forall U \in \mathfrak{O}_{d'}(X') \text{ に対して，} f^{-1}(U) \in \mathfrak{O}_d(X),$$

(iii) X' の任意の閉集合 F に対して，f による F の逆像 $f^{-1}(F)$ は X の閉集合である;

$$\forall F \in \mathfrak{A}_{d'}(X') \text{ に対して，} f^{-1}(F) \in \mathfrak{A}_d(X).$$

[19] 定理 5 における (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) を示せ．

[20] 定理 5 における (i) $\Longleftrightarrow$ (iii) を示せ．(ヒント 問 **[19]** の (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) を用いてよい)