位相空間論A（第4回小テスト・2008/07/11）

各問 10 点 (問 [**1**]–[**25**])

次の問の中から，各自適当な (=勉強してきた) 問題を選んで解答せよ．(100 点以上もカウント)

順番通りに解く必要はない．また，解こうとする問より以前の問は (示せたとして) 使ってよい．

---

*印は**定義のみ**を答える問題 (サービス問題)

[**1**]* **(点列の収束)** 距離空間 (X,d)，部分集合 $A \subset X$ に対して，
A の点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $\alpha \in X$ に収束するとは？その**定義**を書け．

[**2**] **(連続写像と点列の関係)** 距離空間 (X,d), (X',d'), 部分集合 $A \subset X$ の点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対して，
$f: X \to X'$ が連続写像のとき，$\displaystyle\lim_{i\to\infty} x_i = \alpha \implies \lim_{i\to\infty} f(x_i) = f(\alpha)$ を示せ．

[**3**] **(集積点の点列的表現)** 距離空間 (X,d)，部分集合 $A \subset X$ に対して，次を示せ：
点 x が $A^d \iff$ (i) $\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} \subset A - \{x\}$, (ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = x$ を満たす $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が存在する．

[**4**] **(閉集合の点列的表現)** 距離空間 (X,d)，部分集合 $F \subset X$ に対して，次を示せ：
$F \subset X$ が閉集合 $\iff$ F の点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が x に収束すれば $x \in F$.

[**5**] **(触点の点列的表現)** 距離空間 (X,d)，部分集合 $A \subset X$ に対して，次を示せ：
$x \in \overline{A} \iff x$ に収束する A の点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が存在する．

[**6**] $(\mathbb{R}^2, d_2)$ の点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を $x_n = \left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\cos\dfrac{n\pi}{8}, \dfrac{1}{\sqrt{n}}\sin\dfrac{n\pi}{8}\right)$ によって定める．

(1) 点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の第 16 項までを図示せよ，

(2) 点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は原点 $(0,0)$ に収束することを示せ．

また，$\varepsilon = 1/1000$ のとき，収束の定義の N はどの位大きくとる必要があるか？

[**7**]* **(A の直径, A と B の間の距離)** 距離空間 (X,d)，部分集合 $A, B \subset X$ $(A, B \neq \emptyset)$ に対して，A の直径 $\delta(A)$ とは？その**定義**を書け．また， A と B の間の距離 $d(A,B)$ の**定義**を書け．

[**8**]* **(有界)** 距離空間 (X,d)，部分集合 $A \subset X$ に対して，A が有界とは？その**定義**を書け．
また，点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が有界の**定義**を書け．

[**9**]* **(部分距離空間)** 距離空間 (X,d)，部分集合 $A \subset X$ に対して，(A, d_A) が (X,d) の部分距離空間であるとは？その**定義**を書け．

[**10**] **(部分距離空間の開集合，閉集合)** 部分距離空間 $(A, d_A) \subset (X,d)$，部分集合 $B \subset A \subset X$ に対して，(定義から) 点 $a \in A$ の (A, d_A) における ε-近傍 $B_{d_A}(a;\varepsilon)$ は，(X,d) における ε-近傍 $B_d(a;\varepsilon)$ に対し，$B_{d_A}(a;\varepsilon) = B_d(a;\varepsilon) \cap A$ となる．さらに，以下を示せ：
(1) U' が (A, d_A) の開集合 $\iff \exists U \in \mathfrak{O}_d(X)$ s.t. $U' = U \cap A$,
(2) F' が (A, d_A) の閉集合 $\iff \exists F \in \mathfrak{A}_d(X)$ s.t. $F' = F \cap A$.

[**11**] **(閉集合と完備性の関係)**
完備距離空間 (X,d)，部分距離空間 $(A, d_A) \subset (X,d)$ に対して，次を示せ：
(A, d_A) は完備 $\iff A$ は X の閉集合．

---

[12]* **(点列コンパクト)**
距離空間 (X, d) に対して，部分集合 $A \subset X$ が点列コンパクトとは？その**定義**を書け.

[13]* **(被覆, 開被覆)**
距離空間 (X, d)，部分集合 $A \subset X$ に対して，A の被覆とは？その**定義**を書け.
また，A の開被覆の**定義**を書け.

[14]* **(コンパクト)**
距離空間 (X, d) に対して，部分集合 $A \subset X$ がコンパクトとは？その**定義**を書け.

[15] 距離空間 (X, d)，コンパクト集合 $A \subset X$ に対して，次を示せ：
部分集合 $B \subset A$ が閉集合 $\Longrightarrow$ B はコンパクト.

[16] 距離空間 (X, d) に対して，次を示せ：$A \subset X$ はコンパクト $\Longrightarrow$ A は有界閉集合.

[17] **(Bolzano-Weierstrass の定理 (集積点定理))**
距離空間 (X, d)，コンパクト集合 $A \subset X$ に対して，次を示せ：
$B \subset A$ は無限部分集合 $\Longrightarrow$ B は少なくとも 1 つ集積点をもつ.

[18] 距離空間 (X, d)，部分集合 $A \subset X$ に対して，次を示せ：
A はコンパクト $\Longrightarrow$ A は点列コンパクト.

---

[19]* **(全有界)** 距離空間 (X, d) に対して，部分集合 $A \subset X$ が全有界であるとは？その**定義**を書け.

[20] 距離空間 (X, d)，部分集合 $A \subset X$ に対して，次を示せ：A は全有界 $\Longrightarrow$ A は有界.

[21] $(\mathbb{R}^n, d_2)$，部分集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ に対して，次を示せ：A は全有界 $\iff$ A は有界.

---

[22]* **(非連結)** 距離空間 (X, d) に対して, 部分集合 $A \subset X$ が非連結とは？その**定義**を書け.

[23]* **(連結)** 距離空間 (X, d) に対して，部分集合 $A \subset X$ が連結とは？その**定義**を書け.
(ヒント　問 [22] の非連結を使って定義してよい)

[24] **(開かつ閉集合)** 距離空間 (X, d) に対して，次を示せ：
X は連結 $\iff$ X の部分集合で開集合かつ閉集合となるものは X と $\emptyset$ のみ.

[25] **(離散距離空間の開集合と閉集合)**
離散距離空間 (X, d_0) の任意の部分集合は開集合かつ閉集合であることを示せ.
(ヒント１： X 上の離散距離 d_0 は，$\forall x, y \in X$ に対して，次で定義されていたのだった．)

$$d_0(x, y) := \begin{cases} 0, & (x = y \text{ のとき}), \\ 1, & (x \neq y \text{ のとき}). \end{cases}$$

(ヒント２： $A \subset X$ が閉集合 $\iff$ $A^d \subset A$ を思い出す．)