位相空間論A（第1回小テスト・2008/04/25）

各小問 20 点 (200 点満点)

[1] 空でない集合 X 上の距離 (関数) の定義を書け ((D1),(D2),(D3) の内容を詳しく説明する).
(距離 d が定義された集合 X を距離空間といい，(X,d) で表すのであった．)

[2] 任意の空でない集合 X に対して定義できるような距離 (関数) の例を1つ挙げよ.

$\mathbb{R}$ を実数全体の集合, $\mathbb{R}^n=\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}$ (n 個の直積) とする．$\mathbb{R}^n$ の2点 $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ に対して，**ユークリッドの距離** d_2 を次で定める：

$$d_2(x,y) := \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}.$$

また，実数値関数 d_0, d_1, $d_\infty : \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ を以下で定義する：

$$d_0(x,y) := \begin{cases} 0, & (x=y \text{ のとき}), \\ 1, & (x\neq y \text{ のとき}), \end{cases}$$
$$d_1(x,y) := |x_1-y_1|+|x_2-y_2|+\cdots+|x_n-y_n|,$$
$$d_\infty(x,y) := \max\{|x_1-y_1|,|x_2-y_2|,\cdots,|x_n-y_n|\},$$

但し，$\max\{a_1,\ldots,a_n\}$ は $a_1,\ldots,a_n$ の中の最大値を表す.

[3] d_2 は実際に $\mathbb{R}^n$ 上の距離 (関数) となることを示せ (このとき，距離空間 $(\mathbb{R}^n,d_2)$ を**ユークリッド空間**というのであった)．但し，シュワルツの不等式は証明なしで，自由に使ってよい.

シュワルツの不等式 任意の $2n$ 個の実数 $a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n$ に対して，

$$\Bigl(\sum_{i=1}^n a_ib_i\Bigr)^2 \le \Bigl(\sum_{i=1}^n a_i^2\Bigr)\Bigl(\sum_{i=1}^n b_i^2\Bigr)$$

が成り立つ.

[4] d_0 は $\mathbb{R}^n$ 上の距離 (関数) となり，従って $(\mathbb{R}^n,d_0)$ は距離空間である事を示せ.

[5] d_1 は $\mathbb{R}^n$ 上の距離 (関数) となり，従って $(\mathbb{R}^n,d_1)$ は距離空間である事を示せ.

[6] d_∞ は $\mathbb{R}^n$ 上の距離 (関数) となり，従って $(\mathbb{R}^n,d_\infty)$ は距離空間である事を示せ.

[7] (5点×4) 距離空間 $(\mathbb{R}^2,d)$ の中で2点 $x=(-2,3,2)$, $y=(2,2,2)\in\mathbb{R}^3$ をとる.
次の距離 d に対し x と y の間の距離 $d(x,y)$ を求めよ：
(i) $d=d_2$,　(ii) $d=d_0$,　(iii) $d=d_1$,　(iv) $d=d_\infty$.

[8] (5点×4) 距離空間 $(\mathbb{R}^2,d)$ の中で3点 $x=(-2,3,2)$, $y=(2,2,2)$, $z=(0,0,0)\in\mathbb{R}^3$ をとる.
次の距離 d に対し，3点のうち一番距離の近い2点，一番距離の遠い2点を答えよ (複数回答可)：
(i) $d=d_2$,　(ii) $d=d_0$,　(iii) $d=d_1$,　(iv) $d=d_\infty$.

[9] (5点×4) 距離空間 $(\mathbb{R}^2,d)$ の中で原点 $x=(0,0)$ をとる.
次の距離 d に対し，集合 $\{y\in\mathbb{R}^2 \mid d(x,y)=1\}$ (半径1の円) を図示せよ：
(i) $d=d_2$,　(ii) $d=d_0$,　(iii) $d=d_1$,　(iv) $d=d_\infty$.

[10] (5点×4) 距離空間 $(\mathbb{R}^2,d)$ の中で2点 $x=(2,1)$, $y=(-2,-1)\in\mathbb{R}^2$ をとる.
次の距離 d に対し，集合 $\{z\in\mathbb{R}^2 \mid d(x,z)=d(y,z)\}$ (x と y からの距離が等しい点の集合) を図示せよ：
(i) $d=d_2$,　(ii) $d=d_0$,　(iii) $d=d_1$,　(iv) $d=d_\infty$.