位相空間論A（第2回小テスト・2008/05/30）

各小問 10 点 (150 点満点)

([**1**]–[**8**] 距離空間に関する問題，[**9**]–[**15**] ユークリッド空間に関する問題)

[**1**] 空でない集合 X 上の距離 (関数) の定義を書け ((D1),(D2),(D3) の内容を詳しく説明する).
(距離 d が定義された集合 X を距離空間といい，(X, d) で表すのであった．)

[**2**] $(\mathbb{R}^n, d_2)$ をユークリッド空間 (ユークリッド距離による距離空間) とする．
2 点 $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ に対するユークリッドの距離 d_2 の定義を書き，特に $n = 4$ のとき，2 点 $x = (1, 2, 3, 4)$, $y = (1, -1, 1, -1) \in \mathbb{R}^4$ の間の距離 $d_2(x, y)$ を求めよ.

集合 X として，$C[0, 1] := \{f \mid f$ は閉区間 $[0, 1]$ 上で定義された実数値連続関数$\}$ をとる．
$C[0, 1]$ の 2 点 $f, g \in C[0, 1]$ に対して，距離 d_1 を

$$d_1(f, g) := \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$$

によって定義すれば，$(C[0, 1], d_1)$ は距離空間をなす.

[**3**] 距離空間 $(C[0, 1], d_1)$ に対し，3 点 $f = 4x^2 - 4x + 1$, $g = -x^2 + 1$, $h = 0 \in C[0, 1]$ のうち，一番距離 d_1 が近い (小さい) 2 点を答えよ.

集合 X として，実数を成分とする 2×2 行列全体の集合 $M_2(\mathbb{R})$ をとる．
行列 $A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le 2} \in M_2(\mathbb{R})$ の成分を 1 列に並べる事によって，全単射

$$h : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^4, \quad A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \longmapsto (a_{1,1}, a_{1,2}, a_{2,1}, a_{2,2})$$

が得られる．このとき，2 点 $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ の距離を $d(A, B) := d_2(h(A), h(B))$, 但し d_2 は $\mathbb{R}^4$ におけるユークリッドの距離，と定義すれば $(M_2(\mathbb{R}), d)$ は距離空間をなす.

[**4**] 距離空間 $(M_2(\mathbb{R}), d)$ に対し，3 点 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ $\in M_2(\mathbb{R})$ のうち，一番距離 d が近い (小さい) 2 点を答えよ.

集合 $X = \mathbb{Z}$ として，素数 p を 1 つ固定する．2 点 $x, y \in \mathbb{Z}$ に対して，

$$d^{(p)}(x, y) := \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1/p^r, & x \neq y, \end{cases}$$

但し，r は $p^r \mid (x - y)$ なる最大の整数 $r \in \mathbb{Z}$ とする ($a \mid b \overset{\text{def}}{\iff} a$ は b の約数).

[**5**] $d^{(p)}$ は $\mathbb{Z}$ 上の距離 (関数) となり，従って $(\mathbb{Z}, d^{(p)})$ は距離空間となることを示せ.

[**6**] 距離空間 $(\mathbb{Z}, d^{(p)})$ に対し，$p = 3$ とする．
3 点 $x = -9$, $y = 9$, $z = 18 \in \mathbb{Z}$ のうち，一番距離 $d^{(3)}$ が近い (小さい) 2 点を答えよ.

---

[7] 距離空間 (X, d) の 2 点 $x, y \in X$ に対して，$\widetilde{d}(x, y) := \dfrac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$ と定義すると，$(X, \widetilde{d})$ は，$\forall x, y \in X$ に対して，$\widetilde{d}(x, y) < 1$ を満たす距離空間となることを示せ.

[8] 集合 $X = \mathbb{R}$ とし，2 点 $x, y \in \mathbb{R}$ に対して，$d_1(x, y) := |x - y|$, $d^{(2)}(x, y) := |x^2 - y^2|$, $d^{(3)}(x, y) := |x^3 - y^3|$, $d^{(4)}(x, y) := |x^4 - y^4|$ とする．$(\mathbb{R}, d_1), (\mathbb{R}, d^{(2)}), (\mathbb{R}, d^{(3)}), (\mathbb{R}, d^{(4)})$ のうち距離空間であるものを全て選べ (証明不要).

以下，ユークリッド空間 $(\mathbb{R}^n, d_2)$ について考える ($d = d_2$).

> 点 $a \in \mathbb{R}^n$ の ε-近傍 $B(a; \varepsilon)$ とは，$B(a; \varepsilon) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid d_2(x, a) < \varepsilon\}$ のことであった.

[9] ユークリッド空間 $(\mathbb{R}^n, d_2)$ の開集合 U の定義を書け.

[10] 次の 3 つのうち，$\mathbb{R}$ の開集合であるものを全て選べ (証明不要).
(1) 開区間 $(0, 1)$, (2) 半開区間 $[0, 1)$, (3) 閉区間 $[0, 1]$.

[11] 次の 2 つのうち，どちらか 1 つを示せ.
(1) 点 $a \in \mathbb{R}^n$ の ε-近傍 $B(a; \varepsilon)$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合.
(2) 点 $a \in \mathbb{R}^n$ と $\forall \varepsilon > 0$ に対して，集合 $A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d_2(x, a) > \varepsilon\}$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合.

[12] 開区間の直積 $A = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \subset \mathbb{R}^2$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合であることを示せ.

[13] $\mathbb{R}^n$ の有限個の開集合 $U_1, U_2, \ldots, U_k$ に対し，共通部分 $U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_k$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合であることを示せ.

[14] (有限集合とは限らない) 集合 Λ の元 λ に対応して，$\mathbb{R}^n$ の開集合族 $\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ が与えられたとき，その和集合 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合であることを示せ.

[15] **[13]** は無限個の開集合の共通部分 $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ とすると，(一般には) 成立しない．このことを，反例を挙げることによって示せ．すなわち，$\mathbb{R}^n$ の開集合族 $\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ に対して，共通部分 $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ が開集合ではない例を挙げ，実際に開集合でないことを示せ ($n = 1$ のときでよい).