位相空間論A（第3回小テスト解答・2008/07/11）[1]

各問 10 点 (200 点満点)

[1] 空でない集合 X に対し，直積集合 $X \times X$ 上の実数値関数 $d : X \times X \to \mathbb{R}$ が次の3つの条件 (D1),(D2),(D3) を満たすとき，d を X 上の距離 (関数) という．
(D1) $\forall x, y \in X$ に対して，$d(x,y) \geq 0$ であり，また $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$ が成り立つ．
(D2) $\forall x, y \in X$ に対して，$d(x,y) = d(y,x)$ が成り立つ．
(D3) $\forall x, y, z \in X$ に対して，$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ が成り立つ．

[2] 距離空間 (X,d) に対して，部分集合 $U \subset X$ が X の開集合であるとは，
$\forall x \in U$ に対して，$\exists \varepsilon > 0$ s.t. $B(x;\varepsilon) \subset U$ が成り立つことをいう．
部分集合 $F \subset X$ は補集合 F^c が X の開集合であるとき，X の閉集合という．

[3] 距離空間 (X,d)，部分集合 $A \subset X$ に対して，
(i) 点 $x \in X$ が A の内点とは，$\exists \varepsilon > 0$ s.t. $B(x;\varepsilon) \subset A$ が成り立つこと．
(ii) 点 $x \in X$ が A の外点とは，$\exists \varepsilon > 0$ s.t. $B(x;\varepsilon) \subset A^c$ が成り立つこと．
(iii) 点 $x \in X$ が A の内点でも外点でもない場合，A の境界点という．

[4] (i) A は X の開集合 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall x \in A$ に対して，$\exists \varepsilon > 0$ s.t. $B(x;\varepsilon) \subset A \Longleftrightarrow A \subset A^i$.
定義から，いつも $A^i \subset A$ であるから，$A \subset A^i \Longleftrightarrow A = A^i$ を得る．
(ii) $x \in A^i \Longrightarrow x \in B^i$ を示せばよい．
$x \in A^i \Longrightarrow \exists \varepsilon > 0$ s.t. $B(x;\varepsilon) \subset A \subset B$ ($\because$ 仮定より $A \subset B$) $\Longrightarrow x \in B^i$.

[5] ($\subset$) 定義から任意の部分集合 $A \subset X$ に対して，$A^i \subset A$. よって $(A^i)^i \subset A^i$.
($\supset$) $x \in A^i \Longrightarrow x \in (A^i)^i \Longleftrightarrow \exists \varepsilon > 0$ s.t. $B(x;\varepsilon) \subset A^i$ を示せばよい．
$x \in A^i \Longrightarrow \exists \varepsilon > 0$ s.t. $B(x;\varepsilon) \subset A$ である．このとき，$\forall y \in B(x;\varepsilon)$ に対し，$\varepsilon' \leq \varepsilon - d(x,y)$ なる $\varepsilon' \in \mathbb{R}$ をとれば，$B(y;\varepsilon') \subset B(x;\varepsilon) \subset A$ となり，$y \in A^i$. よって，$B(x;\varepsilon) \subset A^i$.

[6] $U \subset X$; 開集合に対し，$U \subset A \Longrightarrow U \subset A^i$ を示せばよい．
$x \in U$ とすると，$\exists \varepsilon > 0$ s.t. $B(x;\varepsilon) \subset U \subset A$ ($\because$ 仮定より) $\Longrightarrow x \in A^i$. よって，$U \subset A^i$.

[7] ($\subset$) $A \cap B \subset A$, $A \cap B \subset B$ より，$(A \cap B)^i \subset A^i$, $(A \cap B)^i \subset B^i$ ($\because$ 問 **[4]**(ii) より $A \subset B \Longrightarrow A^i \subset B^i$). よって，$(A \cap B)^i \subset A^i \cap B^i$.
($\supset$) $A^i \subset A$, $B^i \subset B$ より，$A^i \cap B^i \subset A \cap B$. (問 **[6]** より) $(A \cap B)^i$ は $A \cap B$ に含まれる最大の開集合であり，$A^i \cap B^i$ は開集合であるから $(A \cap B)^i \supset A^i \cap B^i$.

[8] 距離空間 (X,d)，部分集合 $A \subset X$ に対して，
(i) 点 $x \in X$ が A の触点とは，$\forall \varepsilon > 0$ に対して，$B(x;\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ が成り立つこと．
(ii) 点 $x \in X$ が A の集積点とは，$\forall \varepsilon > 0$ に対して，$B(x;\varepsilon) \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset$ が成り立つこと．
(iii) 点 $x \in X$ が A の孤立点とは，$\exists \varepsilon > 0$ s.t. $B(x;\varepsilon) \cap A = \{x\}$ が成り立つこと．

[9] A の閉包 $\overline{A}$ $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ A の触点全体の集合．A の導集合 A^d $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ A の集積点全体の集合．

[10] ($\mathrm{K_i}$) $\overline{\emptyset} = \overline{X^c} = (X^i)^c$ ($\because$ 補題) $= X^c$ ($\because$ ($\mathrm{I_i}$)) $= \emptyset$,
($\mathrm{K_{ii}}$) $\overline{A} = ((A^c)^i)^c$ ($\because$ 補題) $\subset (A^c)^c$ ($\because$ ($\mathrm{I_{ii}}$)) $= A$,
($\mathrm{K_{iii}}$) $\overline{A \cup B} = (((A \cup B)^c)^i)^c$ ($\because$ 補題) $= ((A^c \cap B^c)^i)^c = ((A^c)^i \cap (B^c)^i)^c$ ($\because$ ($\mathrm{I_{iii}}$))
$= ((A^c)^i)^c \cup ((B^c)^i)^c = \overline{A} \cup \overline{B}$ ($\because$ 補題),
($\mathrm{K_{iv}}$) $\overline{\overline{A}} = ((\{((A^c)^i)^c\}^c)^i)^c$ ($\because$ 補題) $= (\{(\{(A^c)^i\}^c)^c\}^i)^c$
$= (\{(A^c)^i\}^i)^c = ((A^c)^i)^c$ ($\because$ ($\mathrm{I_{iv}}$)) $= \overline{A}$ ($\because$ 補題).

[11] $(A \cup B)^i \neq A^i \cup B^i$ **となる例**．$(\mathbb{R}, d_2)$ において，閉区間 $A = [-1, 0]$, $B = [0, 1]$ をとれば，$(A \cup B)^i = ([-1, 1])^i = (-1, 1)$. しかし，$A^i = (-1, 0)$, $B^i = (0, -1)$ より $A^i \cup B^i = (-1, 1) - \{0\}$ となり，$(A \cup B)^i \neq A^i \cup B^i$ である．

[1] Web 版 (得点分布等の一部情報を削除)

[12] $\forall x \in \mathbb{R}$ に対して，$B(x;\varepsilon) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ は有理数も無理数も含んでいる (有理数・無理数の稠密性)．つまり，$B(x;\varepsilon) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$ かつ $B(x;\varepsilon) \cap \mathbb{Q}^c \neq \emptyset$ であり，$x \in \mathbb{Q}^f$ を得る．よって，$\mathbb{Q}^f = \mathbb{R}$ となる．$\mathbb{R} = \mathbb{Q}^i \cup \mathbb{Q}^e \cup \mathbb{Q}^f$ (直和) より，$\mathbb{Q}^i = \mathbb{Q}^e = \emptyset$ も分かる．

[13] $A^i = \emptyset$, $A^e = \mathbb{R} - (A \cup \{0\})$, $A^f = X \cup \{0\}$, $\overline{A} = A \cup \{0\}$, $A^d = \{0\}$, $\{A$ の孤立点$\} = A$.

[14] (背理法) $x \in X$ を A の集積点とする．いま，$\exists \varepsilon' > 0$ s.t. $B(x;\varepsilon') \cap A$ は有限集合，を仮定すれば，$\delta := \min\{d(x,b) \mid b \in \big((B(x;\varepsilon') \cap A) - \{x\}\big)\}$ が存在する．そこで，$\varepsilon'' \leq \delta$ なる $\varepsilon'' \in \mathbb{R}$ をとれば，$B(x;\varepsilon'') \cap (A - \{x\}) = \emptyset$．これは，$x$ が A の集積点であることに矛盾する．

[15] A の点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ がコーシー列
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall \varepsilon > 0$ に対して，$\exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall m,n \in \mathbb{N}$ に対して，$m,n \geq N \Longrightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon$.
また，距離空間 (X,d) において，任意のコーシー列が収束するとき X は完備であるという．

[16] 各 $k = 1,\ldots,n$ に対して，d_k は X_k 上の距離であり，距離の公理 (D1),(D2),(D3) を満たす．
よって，$\forall x,y \in X$ に対して，$d^\times(x,y) \geq 0$ であり，$d^\times(x,y) = 0 \iff k = 1,\ldots,n$ に対して，$d_k(x_k,y_k) = 0 \iff k = 1,\ldots,n$ に対して，$x_k = y_k$ ($\because d_k(x_k,y_k) = 0 \iff x_k = y_k$) $\iff k = 1,\ldots,n$ に対して，$x_k = y_k \iff x = y$. よって，(D1) を満たす．(D2) も $k = 1,\ldots,n$ に対して，$d_k(x_k,y_k) = d_k(y_k,x_k)$ であることから OK.
(D3) は，$a_k := d_k(x_k,y_k)$, $b_k := d_k(y_k,z_k)$, $c_k := d_k(x_k,z_k)$ とおけば，$\sqrt{\sum_{k=1}^n c_k^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}$ と書ける．今，各 d_k の三角不等式より $c_k \leq a_k + b_k$ が成り立ち，$\sqrt{\sum_{k=1}^n c_k^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n (a_k+b_k)^2}$ であるので，Minkowski の不等式 $\sqrt{\sum_{k=1}^n (a_k+b_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}$ と合わせれば，(D3) を得る．

[17] まず，(i) $\iff$ 実数列 $\{d^\times(x_i,\alpha)\}_{i\in\mathbb{N}}$ は 0 に収束 $\iff \lim_{i\to\infty} d^\times(x_i,\alpha) = 0$,
(ii) $\iff$ 実数列 $\{d_k(x_i^{(k)},\alpha_k)\}_{i\in\mathbb{N}}$ は 0 に収束 $\iff \lim_{i\to\infty} d_k(x_i^{(k)},\alpha_k) = 0$, に注意する．
(i) $\Longrightarrow$ (ii). 各 $k = 1,\ldots,n$ に対して，$d_k(x_i^{(k)},\alpha_k) = \sqrt{d_k(x_i^{(k)},\alpha_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n d_k(x_i^{(k)},\alpha_k)^2} = d^\times(x_i,\alpha)$ が成り立つので，$\lim_{i\to\infty} d^\times(x_i,\alpha) = 0$ より，$\lim_{i\to\infty} d_k(x_i^{(k)},\alpha_k) = 0$ を得る．
(ii) $\Longrightarrow$ (i). (ii) を仮定すると，実数列 $\{d_k(x_i^{(k)},\alpha_k)\}_{i\in\mathbb{N}}$ は 0 に収束する．よって，$\exists m_k \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall i \in \mathbb{N}, i \geq m_k \Longrightarrow d_k(x_i^{(k)},\alpha_k) < \varepsilon/\sqrt{n}$. ここで，$M := \max\{m_1,\ldots,m_n\}$ とすれば，$\forall i \in \mathbb{N}, i \geq M \Longrightarrow d^\times(x_i,\alpha) = \sqrt{\sum_{k=1}^n d_k(x_i^{(k)},\alpha_k)^2} < \sqrt{n\cdot(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}})^2} = \varepsilon$. よって，実数列 $\{d^\times(x_i,\alpha)\}_{i\in\mathbb{N}}$ は 0 に収束し，上記注意から (i) が従う．

[18] $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ の点列 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, $x_i = (x_i^{(1)},\ldots,x_i^{(n)})$ をコーシー列とする．すなわち，$\forall \varepsilon > 0$ に対して，$\exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall m,n \in \mathbb{N}$ に対して，$m,n \geq N \Longrightarrow d^\times(x_m,x_n) < \varepsilon$. ここで，$k = 1,\ldots,n$ に対して，$d_k(x_n^{(k)},x_m^{(k)}) = \sqrt{d_k(x_n^{(k)},x_m^{(k)})^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n d_k(x_n^{(k)},x_m^{(k)})^2} = d^\times(x_n,x_m) < \varepsilon$ より，各 $\{x_i^{(k)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ はコーシー列となる．よって，各 X_k の完備性から，各 $\{x_i^{(k)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ は収束し，定理 3 から $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ は収束する．よって，X は完備である．

[19] **(i) $\Longrightarrow$ (ii)**. $\forall a \in f^{-1}(U)$ に対して，$f(a) \in U$ であり，$U \in \mathfrak{O}_{d'}(X')$ より，$\exists \varepsilon > 0$ s.t. $B_{d'}(f(a);\varepsilon) \subset U$. ここで仮定 (i) から，$f$ は連続だから，この $\varepsilon > 0$ に対して，$\exists \delta > 0$ s.t. $f(B_d(a;\delta)) \subset B_{d'}(f(a);\varepsilon)$. よって，$f(B_d(a;\delta)) \subset U$ であり，$B_d(a;\delta) \subset f^{-1}(U)$. これより，$f^{-1}(U)$ は X の開集合.
(ii) $\Longrightarrow$ (i). $\forall a \in X$, $\forall \varepsilon > 0$ に対して，$B_{d'}(f(a);\varepsilon) \in \mathfrak{O}_{d'}(X')$ である．ここで，仮定 (ii) より，$f^{-1}(B_{d'}(f(a);\varepsilon)) \in \mathfrak{O}_d(X)$. よって，$\exists \delta > 0$ s.t. $B_d(a;\delta) \subset f^{-1}(B_{d'}(f(a);\varepsilon))$. つまり，$f(B_d(a;\delta)) \subset B_{d'}(f(a);\varepsilon)$ を得る．

[20] **(i) $\Longrightarrow$ (iii)**. $F \in \mathfrak{A}_{d'}(X') \Longrightarrow f^{-1}(F^c) \in \mathfrak{O}_d(X)$ ($\because$ 前問 **[19]** (i) $\Longrightarrow$ (ii)). これより，$f^{-1}(F^c) = f^{-1}(X'-F) = X - f^{-1}(F)$ は X の開集合であり，$f^{-1}(F)$ は X の閉集合.
(iii) $\Longrightarrow$ (i). $U \in \mathfrak{O}_{d'}(X')$ に対して，仮定 (iii) より，$f^{-1}(X'-U) = X - f^{-1}(U) \in \mathfrak{A}_d(X)$. これより，$f^{-1}(U)$ は X の開集合となる．すなわち，(iii)$\Longrightarrow$(ii) が示された．よって，前問 **[19]** の (ii) $\Longrightarrow$ (i) と合わせれば，(iii) $\Longrightarrow$ (i) を得る．