位相空間論A（第4回小テスト解答・2008/07/16）[1]

各問 10 点 (250 点満点)

[1]* **(点列の収束)** 距離空間 (X,d), 部分集合 $A\subset X$ に対して,
$A\subset X$ の点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $\alpha\in X$ に収束する
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall\varepsilon>0$ に対して，$\exists N\in\mathbb{N}$ s.t. $\forall n\in\mathbb{N}$ に対して，$n\geq N\Longrightarrow d(x_n,\alpha)<\varepsilon$
$\Longleftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0$ に対して，$\exists N\in\mathbb{N}$ s.t. $\forall n\in\mathbb{N}$ に対して，$n\geq N\Longrightarrow x_n\in B(\alpha;\varepsilon)$.
($n\geq N$ の代わりに，$n>N$ でもよい)

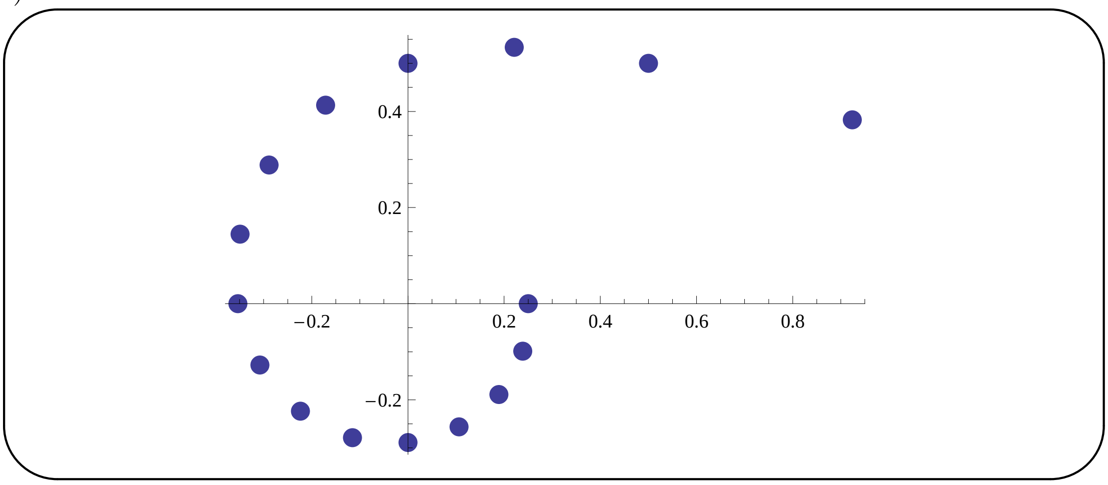
[2] f は連続写像より，$\forall\varepsilon>0$ に対して，$\exists\delta>0$ s.t. $f(B_d(\alpha;\delta))\subset B_{d'}(f(a);\varepsilon)$. また，$\lim_{i\to\infty}x_i=\alpha$ より，上の δ に対して，$\exists N\in\mathbb{R}$ s.t. $\forall k\in\mathbb{N}$ に対して，$k\geq N\Longrightarrow x_k\in B_d(\alpha;\delta)$. すなわち，$k\geq N\Longrightarrow f(x_k)\subset B_{d'}(f(a;\varepsilon))$ であり，これは $\lim_{i\to\infty}f(x_i)=f(\alpha)$ を示している．

[3] ($\Longrightarrow$) $x\in A^d\Longrightarrow\varepsilon=1/n$ に対して，$B(s;1/n)\cap(A-\{x\})=:S_n\neq\emptyset$. 各 n に対して，$x_n\in S_n$ をとり，点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を定めれば条件 (i) を満たす．また，アルキメデスの原理から，$d(x,x_n)<\dfrac{1}{n}\to 0\ (n\to\infty)$ であるので，点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は (ii) も満たす．
($\Longleftarrow$) (i), (ii) を満たす点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対して，$B(x;\varepsilon)$ は x 以外の $\{x_n\,|\,n\in\mathbb{N}\}$ と交わるので，$x\in A^d$ となる．

[4] ($\Longrightarrow$) $F\in\mathfrak{A}_d(X)$, $\lim_{n\to\infty}x_n=x$ と $x\notin F=\overline{F}$ を仮定し，矛盾を導く．
$\forall\varepsilon>0$ に対して，$\exists N\in\mathbb{N}$ s.t. $n\geq N\Longrightarrow x_n\in B(x;\varepsilon)$ である．よって，$x_n\in B(x;\varepsilon)$ で $x\notin F$ より，$x\in F^d$ となる．よって，$x\in F^d\subset\overline{F}$ となる矛盾．
($\Longleftarrow$) 前問 **[3]** より，$y\in F^d\Longrightarrow$ (i) $\{y_n\,|\,n\in\mathbb{N}\}\subset A-\{y\}$, (ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}y_n=y$ を満たす点列 $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が存在し，仮定から $y\in F$. これは $F^d\subset F$ を表しており，すなわち $F=\overline{F}$ である．

[5] ($\Longrightarrow$) $x\in\overline{A}$ とする．$\overline{A}=A\cup A^d$ より，$x\in A$ のときは一点くり返し型点列 $\{x,x,\ldots\}$ の極限，$x\in A^d$ のときは，問 **[3]** より，ある点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の極限となる．
($\Longleftarrow$) $\{x_n\,|\,n\in\mathbb{N}\}\subset A$ かつ $\lim_{n\to\infty}x_n=x$ より，$\{x_n\,|\,n\in\mathbb{N}\}\subset\overline{A}$ でもあり，前問 **[4]** を $F=\overline{A}$ に対して適用すれば，$x\in\overline{A}$ を得る．

[6] (1)



(2) $\forall\varepsilon>0$ に対して，$N>1/\varepsilon^2$ なる $N\in\mathbb{N}$ をとれば，$n\geq N$ なる任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して，$d_2(\mathbf{0},x_n)=d_2((0,0),x_n)=\dfrac{1}{\sqrt{n}}\leq\dfrac{1}{\sqrt{N}}<\varepsilon$ となる．よって，$\lim_{n\to\infty}x_n=\mathbf{0}=(0,0)$ を得る．
$\varepsilon=1/1000$ のとき，上記の N は $10^6+1=1000001$ 以上にとればよい (収束の定義として，等号なしの $n>N$ を採用した場合には，$N=10^6=1000000$ 以上).

[1] Web 版 (得点分布等の一部情報を削除)

[7]* (**A の直径, A と B の間の距離**) 距離空間 (X,d), 部分集合 $A,B\subset X$ に対して,
A の直径 $\delta(A):=\sup\{d(x,y)\,|\,x,y\in A\}$,
A と B の間の距離 $d(A,B):=\inf\{d(x,y)\,|\,x\in A, y\in B\}$.

[8]* (**有界**) 距離空間 (X,d), 部分集合 $A\subset X$ に対して,
A が有界 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 直径 $\delta(A)<\infty$,
点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が有界 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 集合 $\{x_n\mid n\in\mathbb{N}\}$ が有界.

[9]* (**部分距離空間**) 距離空間 (X,d), 部分集合 $A\subset X$ に対して,
A 上の距離を $a,b\in A$ に対して，$d_A(a,b):=d(a,b)$ として定めたとき,
(A,d_A) を (X,d) の部分距離空間という.

[10] (1) ($\Longrightarrow$) $U'\in\mathfrak{O}_{d_A}(A)\Longrightarrow\forall x\in U'$ に対して，$\exists\varepsilon>0$ s.t. $B_{d_A}(x;\varepsilon)\subset U'$. また，$U'=\bigcup_{x\in U'}B_{d_A}(x;\varepsilon')$ である．よって，$U:=\bigcup_{x\in U'}B_d(x;\varepsilon')$ とおけば，$U'=\bigcup_{x\in U'}B_{d_A}(x;\varepsilon')=\bigcup_{x\in U'}(B_d(x;\varepsilon')\cap A)=\left(\bigcup_{x\in U'}B_d(x;\varepsilon')\right)\cap A=U\cap A$.
($\Longleftarrow$) $U'=U\cap A\Longrightarrow\forall x\in B$ に対して，$\exists\varepsilon>0$ s.t. $B_d(x;\varepsilon)\subset U$. よって，$B_{d_A}(x;\varepsilon)=B_d(x;\varepsilon)\cap A\ \subset\ U\cap A=B$.
(2) ($\Longrightarrow$) (1) より，$F'\in\mathfrak{A}_{d_A}(A)\iff A-F'\in\mathfrak{O}_{d_A}(A)\overset{(1)}{\Longleftrightarrow}\exists U\in\mathfrak{O}_d(X)$ s.t. $A-F'=U\cap A$. よって，(A,d_A) の中では $F'=U^c\cap A$ であるから，$F=U^c$ とすればよい.
($\Longleftarrow$) $F\in\mathfrak{A}_d(X)$ に対して，$F'=F\cap A$ とすると，(A,d_A) のなかでは $A-F'=A\cap F^c$ である．$F^c\in\mathfrak{O}_d(X)$ であるから，(1) より $A-F^c\in\mathfrak{O}_{d_A}(A)$ すなわち，$F'\in\mathfrak{A}_{d_A}(A)$ を得る.

[11] 問 [4] より [$A\subset X$ が閉集合 $\iff$ A の点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $x\in X$ に収束すれば $x\in A$] — ① に注意する.
($\Longrightarrow$) A の点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ をとり，X の点列とみて $x\in X$ に収束するとする．収束列はコーシー列であるから，$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は X のコーシー列であり，また A のコーシー列でもある．仮定より，(A,d_A) は完備であるから $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は収束し，$x\in A$. よって ①より $A\subset X$ は閉集合.
($\Longleftarrow$) A の任意のコーシー列は，X のコーシー列とみれば，ある $x\in X$ に収束する ($\because$ X は完備)．よって ①より，$x\in A$ であり，(A,d_A) は完備.

[12]* (**点列コンパクト**) 距離空間 (X,d), 部分集合 $A\subset X$ に対して,
A の任意の点列が A の点に収束する部分列をもつとき，A を点列コンパクトという.

[13]* (**被覆, 開被覆**) 距離空間 (X,d), 部分集合 $A\subset X$ に対して,
$A\subset\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$ を満たす X の部分集合族 $C=\{U_\lambda\,|\,\lambda\in\Lambda\}$ を A の被覆という.
特に，開集合からなる A の被覆を A の開被覆という.

[14]* (**コンパクト**) 距離空間 (X,d), 部分集合 $A\subset X$ に対して,
任意の A の開被覆が有限部分被覆をもつとき，A はコンパクトであるという.

[15] $B\subset C:=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$ を開被覆とする．$B\in\mathfrak{A}_d(X)$ より，$C^*:=C\cup B^c$ は A の開被覆であり，A がコンパクトであることから，有限部分被覆 $A\subset\bigcup_{i=1}^m\exists U_i\subset C^*$ がとれる．いま $B^c\cap B=\emptyset$ であり，$B\subset\bigcup_{i=1}^m U_i-B^c\subset C$ は C の有限部分被覆である.

[16] (**A は有界**) ある点 $x\in A$ に対して，$C:=\{B_d(x;i)\,|\,i\in\mathbb{N}\}$ は A の開被覆である ($\because$ $\forall a\in A$ に対して，$\exists i\in\mathbb{N}$ s.t. $d(x,a)<d(x,i)\in\mathbb{R}$；($\mathbb{R}$ の) アルキメデスの原理)．A はコンパクトより，有限部分被覆 $A\subset\exists C^*\subset C$ がとれる．よって，$\exists k\in\mathbb{N}$ s.t. $A\subset B(a;k)$ より A は有界.
(**A は閉集合**) A^c が開集合を示す．$\forall y\in A^c$ に対して，$C^*:=\left\{B^*\!\left(y,\dfrac{1}{i}\right)^c\,\middle|\,i\in\mathbb{N}\right\}$ は A の開被覆, (但し，$B^*(y,\varepsilon):=\overline{B(y,\varepsilon)}$；閉球)．$A$ はコンパクトより，有限部分被覆 $A\subset\exists C'\subset C^*$ が存在して，特に，$\exists k\in\mathbb{N}$ s.t. $A\subset B^*\!\left(y,\dfrac{1}{k}\right)^c$ となる．よって，$A^c\supset B^*\!\left(y,\dfrac{1}{k}\right)\supset B\!\left(y,\dfrac{1}{k}\right)$ となり，$y\in(A^c)^i$. すなわち，A^c は X の開集合である.

[17] (背理法) B は集積点を持たない $\Longrightarrow \forall a \in A$ に対して，$\exists \varepsilon_a > 0$ s.t. $B(a;\varepsilon_a) \cap (B - \{a\}) = \emptyset$. また，この ε_a に対して，$C := \{B(a;\varepsilon_a) \,|\, a \in A\}$ は A の開被覆となる．いま，A はコンパクトより，$\exists a_1, \ldots, a_n \in A$ s.t. $A \subset \bigcup_{i=1}^n B(a_i;\varepsilon_{a_i})$ であるが，各 $B(a_i;\varepsilon_{a_i})$ に含まれる B の点は高々1点 a_i である．よって，$B \subset \{a_1, \ldots, a_n\}$ となり，B が無限集合であることに矛盾する．

[18] A の点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $\alpha \in A$ に収束する部分列を持つことを示す．1点くり返し型点列は，収束する部分列を持つので，$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は無限型，すなわち $B := \{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ は無限集合としてよい．すると，前問 [**17**] によって，B の集積点 $\alpha \in X$ が存在する．このとき，$\alpha \in X$ に収束する $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の部分列 $\{x_{i_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ を次のように作る：各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，$B_n := B\left(\alpha;\dfrac{1}{n}\right) \cap B \neq \emptyset$ なので，$x_{i_n} \in B_n$ を (有限個の $x_1, \ldots, x_{i_{n-1}}$ を避けて) $i_{n-1} < i_n$ となるようにとれば，部分列 $\{x_{i_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $\alpha \in X$ に収束する ($\because$ $d(\alpha, x_{i_n}) < \dfrac{1}{n} \to 0$ $(n \to \infty)$ ；アルキメデスの原理)．ここで A はコンパクトだから，特に閉集合 ($\because$ 問 [**16**]) であり，閉集合 A の点列が $\alpha \in X$ に収束すれば，$\alpha \in A$ である ($\because$ 問 [**4**])．よって，A は点列コンパクト．

[19]* **(全有界)** 距離空間 (X,d), 部分集合 $A \subset X$ に対して，
A が全有界であるとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，A の有限被覆 $A \subset \bigcup_{i=1}^m U_i$ で，$\delta(U_i) < \varepsilon$ (各 U_i の直径が ε 未満) となるものがとれることをいう．

[20] A は全有界であるので，$\exists B_1, \ldots, B_m$ s.t. $A \subset \bigcup_{i=1}^m B_i$, $\delta(B_i) < 1$. また，一般に $\delta(A \cup B) \leq \delta(A) + \delta(B) + d(A,B)$ が成り立つ ($\because$ 直感からは明らかなことであるが，実際，以下の様に示せる：$x, y \in A \cup B$ に対して，($x, y \in A$ または $x, y \in B$ のときは明らかによいので) $x \in A$, $y \in B$ とする．いま，$\forall a \in A$, $\forall b \in B$ に対して，$d(x,y) \leq d(x,a) + d(a,b) + d(b,y) \leq \delta(A) + d(a,b) + \delta(B)$ が成り立ち，よって，$d(x,y) \leq \delta(A) + \inf\{d(a,b)\} + \delta(B) = \delta(A) + d(A,B) + \delta(B)$ を得る．)
よって，$\delta(A) \leq \delta(\bigcup_{i=1}^m B_i) \leq \sum_{i=1}^m \delta(B_i) + \sum_{i\neq j} d(B_i, B_j) < \infty$ であり，A は有界.

[21] ($\Longrightarrow$) 前問 [**20**] より OK.
($\Longleftarrow$) A は有界 $\Longrightarrow A \subset C := \exists[a_1, b_1] \times \cdots \times \exists[a_n, b_n]$．ここで，$\forall \epsilon > 0$ に対して，一辺の長さが $\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$ より小さくなるように C を細分すれば，各直方体の直径は $\sqrt{n \cdot \left(\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)^2} = \varepsilon$ 以下となる．

[22]* **(非連結)** 距離空間 (X,d), 部分集合 $A \subset X$ に対して，
次の3つの条件を満たす開集合 U, V が存在するとき，A は非連結であるという：
(DC1) $A \subset U \cup V$, (DC2) $U \cap V = \emptyset$, (DC3) $U \cap A \neq \emptyset$ かつ $V \cap A \neq \emptyset$.

[23]* **(連結)** 距離空間 (X,d)，部分集合 $A \subset X$ に対して，
A が非連結でないとき，A を連結であるという．

[24] 対偶をとって，
[X は非連結 $\Longleftrightarrow$ $A \subset X$, $A \neq X$, $A \neq \emptyset$ なる開集合かつ閉集合 A が存在する]
を示す.
($\Longrightarrow$) (DC1), (DC2) より，$U = X - V$, $V = X - U$ であり，U, V は共に閉集合.
また，(DC3) より，$U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$ なので $U \neq X$ かつ $V \neq X$ でもある.
($\Longleftarrow$) $U \subset X$ を開集合かつ閉集合で，$U \neq \emptyset$, $U \neq X$ とする．このとき，$V := X - U$ は X の開集合で U と V は X を分離する (すなわち，非連結の定義 (DC1),(DC2),(DC3) を満たす開集合である)．よって，X は非連結.

[25] 任意の部分集合 $A \subset X$ に対して，$A \subset X$ は閉集合 $\Longleftrightarrow$ $A^d \subset A$ であった．しかし，$\forall x \in X$ は A の集積点にはなり得ない ($\because$ $B\left(x;\dfrac{1}{2}\right)$ は x のみを含む)．よって，$A^d = \emptyset$ より $A \subset X$ は閉集合である．また，同様に，$(A^c)^d = \emptyset$ であるので，$A^c \subset X$ は閉集合となり，A は開集合でもある．