位相空間論Ａ（第１回小テスト解答・2008/05/02）[1]

各小問 20 点 (200 点満点)

[1] 空でない集合 X に対し，直積集合 $X \times X$ 上の実数値関数 $d : X \times X \to \mathbb{R}$ が次の 3 つの条件 (D1),(D2),(D3) を満たすとき，d を X 上の距離 (関数) という．
(D1) $\forall x, y \in X$ に対して，$d(x,y) \geq 0$ であり，また $d(x,y) = 0 \iff x = y$ が成り立つ．
(D2) $\forall x, y \in X$ に対して，$d(x,y) = d(y,x)$ が成り立つ．
(D3) $\forall x, y, z \in X$ に対して，$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ が成り立つ．

[2] 例えば，任意の $x, y \in X$ に対して，

$$d(x,y) := \begin{cases} 0, & (x = y \text{ のとき}), \\ \sqrt{2}, & (x \neq y \text{ のとき}), \end{cases}$$

とすればよい．

[3] d_2 が距離 (関数) の定義 (D1),(D2),(D3) を満たすことを言えばよい．
(D1) 定義から，$d_2(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} \geq 0$.
また，$d_2(x,y) = 0 \iff (x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2 = 0 \iff (x_1 - y_1)^2 = 0, \ldots, (x_n - y_n)^2 = 0 \iff x_1 = y_1, \ldots x_n = y_n \iff x = y$ より，(D1) を満たす．
(D2) $d_2(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2} = d_2(y,x)$.
(D3) $a_i := x_i - y_i, b_i := y_i - z_i, (i = 1, \ldots, n)$ とおく．このとき，

$$\sqrt{\textstyle\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\textstyle\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\textstyle\sum_{i=1}^n b_i^2} \text{ — ①}$$

を示せばよい (①は Minkowski (ミンコフスキー) の不等式とも呼ばれる)．
①の両辺は 0 以上であるので，両辺を 2 乗して，

$$\begin{aligned} ① &\iff \textstyle\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 \leq \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} + \sum_{i=1}^n b_i^2 \\ &\iff \textstyle\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \text{ — ②} \end{aligned}$$

を得る．よって，②を示せばよい．
②が成り立つことは，シュワルツの不等式から，任意の実数 $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ に対して，
$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) \Longrightarrow \sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}$ として得られる．
よって，②が成り立ち (D3) が示された．

注意． 最後の式の逆は成り立たない．逆を成り立たせる為には，
$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) \iff |\sum_{i=1}^n a_i b_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}$
とする必要がある (右辺をシュワルツの不等式と呼ぶこともある)．

[4] d_0 が距離 (関数) の定義 (D1),(D2),(D3) を満たすことを言えばよい．
(D1) 定義より，$d_0(x,y) \geq 0$ であり，$d_0(x,y) = 0 \iff x = y$ もよい．
(D2) $x = y$ のとき，$d_0(x,y) = 0 = d_0(y,x)$. $x \neq y$ のとき，$d_0(x,y) = 1 = d_0(y,x)$.
(D3) 背理法によって示す．$x, y, z \in X$ に対して，$d_0(x,z) > d_0(x,y) + d_0(y,z)$ が成り立つと仮定する．これは，$d_0(x,z) = 1$ かつ $d_0(x,y) = d_0(y,z) = 0$ のときであるが，これは $x \neq z$ かつ $x = y = z$ を表しているので矛盾する．よって (D3) は成り立つ．

[5] d_1 が距離 (関数) の定義 (D1),(D2),(D3) を満たすことを言えばよい．
(D1) 定義から，$d_1(x,y) = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n| \geq 0$.
また，$d_1(x,y) = 0 \iff |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n| = 0 \iff |x_1 - y_1| = 0, \ldots, |x_n - y_n| = 0 \iff x_1 = y_1, \ldots x_n = y_n \iff x = y$ より，(D1) を満たす．

[1] Web 版 (得点分布等の一部情報を削除)

(D2) $d_1(x,y) = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n| = |y_1 - x_1| + \cdots + |y_n - x_n| = d_1(y,x)$.
(D3) 実数の集合 $\mathbb{R}$ 上の三角不等式によって，以下が成り立つ.

$$\text{任意の } a,b,c \in \mathbb{R} \text{ に対し，} |a-c| \le |a-b| + |b-c|$$

これより，$d_0(x,z) = \sum_{i=0}^n |x_i - z_i| \le \sum_{i=0}^n (|x_i - y_i| + |y_i - z_i|) = \sum_{i=0}^n |x_i - y_i| + \sum_{i=0}^n |y_i - z_i| = d_0(x,y) + d_0(y,z)$. よって (D3) が成り立つ.

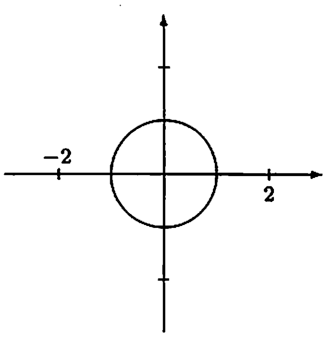
[6] d_∞ が距離 (関数) の定義 (D1),(D2),(D3) を満たすことを言えばよい.
(D1) 定義から，$d_\infty(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|\} \ge 0$.
また，$d_\infty(x,y) = 0 \iff |x_1 - y_1| = 0, \ldots, |x_n - y_n| = 0 \iff x_1 = y_1, \ldots x_n = y_n \iff x = y$ より，(D1) を満たす.
(D2) $d_\infty(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|\} = \max\{|y_1 - x_1|, \ldots, |y_n - x_n|\} = d_\infty(y,x)$.
(D3) $d_\infty(x,z) = |x_k - z_k|, (1 \le k \le n)$ とすると，$d_\infty(x,z) = |x_k - z_k| \le |x_k - y_k| + |y_k - z_k| \le \max\{|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|\} + \max\{|y_1 - z_1|, \ldots, |y_n - z_n|\} = d_\infty(x,y) + d_\infty(y,z)$.

[7] ＜5点×4＞ (i) $d_2(x,y) = \sqrt{17}$, (ii) $d_0(x,y) = 1$, (iii) $d_1(x,y) = 5$, (iv) $d_\infty(x,y) = 4$.

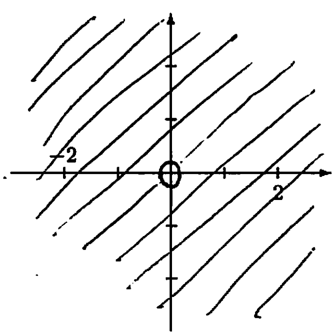
[8] ＜5点×4＞ (i) $d_2(x,z) = \sqrt{17}$, $d_2(y,z) = \sqrt{12}$ より，
一番近いのは y と z, 一番遠いのは x と y, x と z.
(ii) $d_0(x,z) = d_0(y,z) = 1$ より，どの2点も同じ距離である.
(iii) $d_1(x,z) = 7$, $d_1(y,z) = 6$ より，一番近いのは x と y, 一番遠いのは x と z.
(iv) $d_\infty(x,z) = 3$, $d_\infty(y,z) = 2$ より，一番近いのは y と z, 一番遠いのは x と y.

[9] ＜5点×4＞

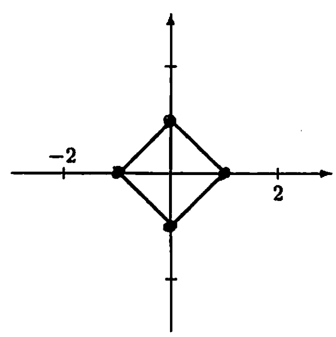
(i)



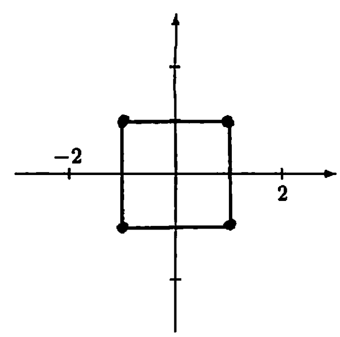
(ii) $x = (0,0)$ は除く



(iii)

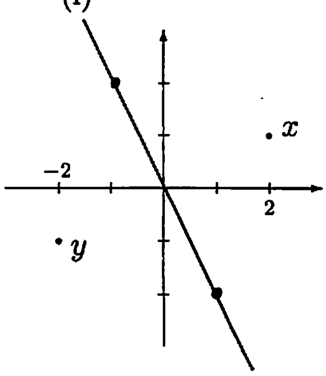


(iv)

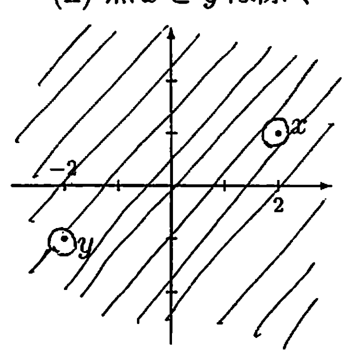


[10] ＜5点×4＞

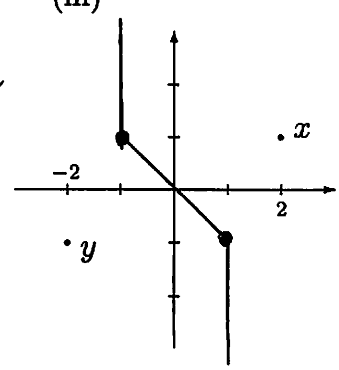
(i)



(ii) 点 x と y は除く



(iii)



(iv)