位相空間論A（第2回小テスト解答・2008/06/06）[1]

各小問 10 点 (150 点満点)

[1] 空でない集合 X に対し，直積集合 $X \times X$ 上の実数値関数 $d : X \times X \to \mathbb{R}$ が次の 3 つの条件 (D1),(D2),(D3) を満たすとき，d を X 上の距離 (関数) という．
(D1) $\forall x, y \in X$ に対して，$d(x,y) \geq 0$ であり，また $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$ が成り立つ．
(D2) $\forall x, y \in X$ に対して，$d(x,y) = d(y,x)$ が成り立つ．
(D3) $\forall x, y, z \in X$ に対して，$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ が成り立つ．

[2] ユークリッド距離は $d_2(x,y) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$ で与えられる．$n = 4$ のとき，2 点 $x = (1,2,3,4)$, $y = (1,-1,1,-1)$ の距離 $d_2(x,y)$ は，$d_2(x,y) = \sqrt{0^2 + 3^2 + 2^2 + 5^2} = \boxed{\sqrt{38}}$.

[3] $d_1(f,g) = \displaystyle\int_0^{\frac{4}{5}} (g(x) - f(x))\,dx + \int_{\frac{4}{5}}^{1} (f(x) - g(x))\,dx = \frac{32}{75} + \frac{7}{75} = \frac{39}{75} = \frac{13}{25} = 0.52,$
$d_1(f,h) = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{3}$, $d_1(g,h) = \displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx = \frac{2}{3}$ より，一番近いのは $\boxed{f \text{ と } h}$.

[4] $d(A,B) = d_2((1,0,0,1),(-1,0,0,-1)) = \sqrt{8}$, $d(A,C) = d_2((1,0,0,1),((0,1,-1,-1) = \sqrt{7}$, $d(B,C) = d_2((-1,0,0,-1),(0,1,-1,-1)) = \sqrt{3}$ より，一番近いのは $\boxed{B \text{ と } C}$.

[5] 定義より，$d^{(p)}(x,y) \geq 0$ かつ $x = y \iff d^{(p)}(x,y) = 0$ であり，また $d^{(p)}(x,y) = d^{(p)}(y,x)$ である．よって，$d^{(p)}$ は (D1),(D2) を満たす．$d^{(p)}$ が (D3) を満たすことは次のように示される．$\forall x, y, z \in \mathbb{Z}$ に対して，$d^{(p)}(x,y) = 1/p^r, d^{(p)}(y,z) = 1/p^s, d^{(p)}(x,z) = 1/p^t$ とする．このとき，$x - z = (x - y) + (y - z)$ より，$x - z$ は p^r または p^s のうちどちらか小さい方では割り切れる．よって，$u := \min\{r,s\}$ とおけば，$p^u \mid (x - z)$. これより，$1/p^t \leq 1/p^u \leq 1/p^r + 1/p^s$ が成り立つが，これは (D3) 三角不等式 $d^{(p)}(x,z) \leq d^{(p)}(x,y) + d^{(p)}(y,z)$ に他ならない．また，$x = z$, $x = y$, $y = z$ のいずれかのときも，(D3) 三角不等式が成り立つ (← 確認すべきこと!)

[6] $d^{(3)}(x,y) = 1/9$, $d^{(3)}(x,z) = 1/27$, $d^{(3)}(y,z) = 1/9$ より，一番近いのは $\boxed{x \text{ と } z}$.

[7] 仮定より，d は距離の公理 (D1),(D2),(D3) を満たす．よって，$\widetilde{d}(x,y) > 0$，また $\widetilde{d}(x,y) = 0 \iff d(x,y) = 0 \iff x = 0$ であり，$\widetilde{d}$ は (D1),(D2) を満たす．また，$f(x) = x/(1+x)$ が $x > 0$ で単調増加 ($f'(x) = 1/(1+x)^2 > 0$) であること，及び d が (D1),(D3) を満たすことから，$\forall x, y, z \in X$ に対して，

$$\widetilde{d}(x,z) = \frac{d(x,z)}{1 + d(x,z)} \leq \frac{d(x,y) + d(y,z)}{1 + d(x,y) + d(y,z)} = \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y) + d(y,z)} + \frac{d(y,z)}{1 + d(x,y) + d(y,z)}$$

が従い，また

$$\frac{d(x,y)}{1 + d(x,y) + d(y,z)} + \frac{d(y,z)}{1 + d(x,y) + d(y,z)} \leq \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)} + \frac{d(y,z)}{1 + d(y,z)} = \widetilde{d}(x,y) + \widetilde{d}(y,z)$$

が成り立つので，$\widetilde{d}$ は (D3) [$\forall x, y, z \in X$ に対して，$\widetilde{d}(x,z) \leq \widetilde{d}(x,y) + \widetilde{d}(y,z)$] を満たす．

[8] $d_1(x,y) = |x - y| = \sqrt{(x-y)^2} = d_2(x,y)$ は $\mathbb{R}$ のユークリッド距離である．
$d^{(2)}(1,-1) = d^{(4)}(1,-1) = 0$ より $d^{(2)}, d^{(4)}$ は距離ではない ((D1) を満たさない).
また，$(\mathbb{R}, d^{(3)})$ は距離空間となる (以下参照)．よって，距離空間であるのは $\boxed{(\mathbb{R}, d_1) \text{ と } (\mathbb{R}, d^{(3)})}$.

[$(\mathbb{R}, d^{(3)})$ が距離空間であること]
定義より，$\forall x, y \in \mathbb{R}$ に対して，$d^{(3)} \geq 0$ であり，$x = y \Longrightarrow d^{(3)}(x,y) = 0$, また $d^{(3)}(x,y) = 0 \Longrightarrow |x^3 - y^3| = |x - y||x^2 + xy + y^2| = 0 \Longrightarrow x = y$ (なぜなら，$x^2 + xy + y^2 = (x + \frac{y}{2})^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq 0$).
よって，$x = y \iff d^{(3)}(x,y) = 0$ となり，$d^{(3)}$ は (D1) を満たす．
また $d^{(3)}(x,y) = |x^3 - y^3| = |y^3 - x^3| = d^{(3)}(y,x)$ より，$d^{(3)}$ は (D2) を満たす．
$d^{(3)}$ が (D3) を満たすことは，実数 $\mathbb{R}$ に対する三角不等式から，$\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ に対して，$d^{(3)}(x,z) = |x^3 - z^3| = |x^3 - y^3 + y^3 - z^3| \leq |x^3 - y^3| + |y^3 - z^3| = d^{(3)}(x,y) + d^{(3)}(y,z)$ として示せる．

[1] Web 版 (得点分布等の一部情報を削除)

[9] 部分集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ が「任意の $x \in U$ に対して，ある実数 $\varepsilon > 0$ が存在して $B(x;\varepsilon) \subset U$ となる」(「$\forall x \in U$ に対して，$\exists \varepsilon > 0$ s.t. $B(x;\varepsilon) \subset U$」) を満たすとき，$\mathbb{R}^n$ の開集合であるという．

[10] 開集合であるものは (1) のみ．

[**解説**] (2) は $\forall \varepsilon > 0$ に対して，点 $x = 0 \in \mathbb{R}$ の任意の ε-近傍 $B(0;\varepsilon) = (-\varepsilon, \varepsilon)$ は $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset [0,1)$ となるようには取れない (もし，$(-\varepsilon, \varepsilon) \subset [0,1)$ であると仮定すると，$-\varepsilon/2 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ かつ $-\varepsilon \notin [0,1)$ より矛盾する) ことから，開集合でないことが分かる．(3) も同様．

[11] ユークリッド距離を $d := d_2$ とかく．

(1) $B(a;\varepsilon)$ が開集合の定義「$\forall x \in B(a;\varepsilon)$ に対して，$\exists \varepsilon' > 0$ s.t. $B(x;\varepsilon') \subset B(a;\varepsilon)$」を満たすことを示せばよい．(その為には，$\varepsilon'$ を $\varepsilon - d(a,x)$ 以下に設定する必要がある ← 分からない場合は $\mathbb{R}^2$ で図を書いてみる!) そこで，$\forall x \in B(a;\varepsilon)$ に対して，$\varepsilon' := \varepsilon - d(a,x)$ とおく．$\forall y \in B(x;\varepsilon')$ に対して，$d(x,y) < \varepsilon'$ であり，d に対する三角不等式 (D3) を用いると，$d(a,y) \le d(a,x) + d(x,y) < d(a,x) + \varepsilon' = \varepsilon$ より $y \in B(a;\varepsilon)$．すなわち，$B(x,\varepsilon') \subset B(a;\varepsilon)$．

(2) A が開集合の定義「$\forall x \in A$ に対して，$\exists \varepsilon' > 0$ s.t. $B(x;\varepsilon') \subset A$」を満たすことを示せばよい．(その為には，$\varepsilon'$ を $d(a,x) - \varepsilon$ 以下に設定する必要がある ← 分からない場合は $\mathbb{R}^2$ で図を書いてみる!) そこで，$\forall x \in A$ に対して，$\varepsilon' := d(a,x) - \varepsilon$ とおく．$\forall y \in B(x;\varepsilon')$ に対して，$d(x,y) < \varepsilon'$ であり，d に対する三角不等式 (D3) を用いると，$d(a,y) \ge d(a,x) - d(y,x) > d(a,x) - \varepsilon' = \varepsilon$ より $y \in A$．すなわち，$B(x,\varepsilon') \subset A$ が示された．

[12] $\forall x = (x_1, x_2) \in A$ に対して，$\varepsilon := \min\{|x_1 - a_1|, |x_1 - b_1|, |x_2 - a_2|, |x_2 - b_2|\}$ (または，それ以下の 0 でない実数でもよい) として，$\forall x \in A$ に対して，$B(x;\varepsilon) \subset A$ を示す．$\forall y \in B(x;\varepsilon)$ と $k = 1, 2$ に対して，$|y_k - x_k| \le d(x,y) < \varepsilon \le \min\{|x_k - a_k|, |x_k - b_k|\}$ より $a_k < y_k < b_k$ が成り立つ．よって，$y \in B(x;\varepsilon) \Longrightarrow y \in A$ となる．すなわち，$B(x;\varepsilon) \subset A$.

[13] $U_1 \cap \cdots \cap U_k$ が開集合の定義「$\forall x \in U_1 \cap \cdots \cap U_k$ に対して，$\exists \varepsilon > 0$ s.t. $B(x;\varepsilon) \subset U_1 \cap \cdots \cap U_k$」を満たすこと示せばよい (そのために，適切な ε を設定する!)．各 $U_i, (i = 1, \ldots, k)$ が $\mathbb{R}^n$ の開集合であることから，$\forall x \in U_1 \cap \cdots \cap U_k$ に対して，$x \in U_i$ であり $\exists \varepsilon_i > 0$ s.t. $B(x;\varepsilon_i) \subset U_i$. よって，$\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k\}$ とすれば，$i = 1, \ldots, k$ に対して，$B(x,\varepsilon) \subset B(x;\varepsilon_i) \subset U_i$ となる．すなわち，$\forall x \in U_1 \cap \cdots \cap U_k$ に対して，$B(x,\varepsilon) \subset U_1 \cap \cdots \cap U_k$ となる．

[14] $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ が開集合の定義「$\forall x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ に対して，$\exists \varepsilon > 0$ s.t. $B(x;\varepsilon) \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$」を満たすこと示せばよい．$\forall x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ に対して，ある $\lambda' \in \Lambda$ で $x \in U_{\lambda'}$ となるので，$\exists \varepsilon > 0$ s.t. $B(x;\varepsilon) \subset U_{\lambda'}$. これより，$B(x,\varepsilon) \subset U_{\lambda'} \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ が従う．

[15] ユークリッド空間 $(\mathbb{R}, d_2)$ で $\lambda = n$, $\Lambda = \mathbb{N}$ として，開区間 $U_n := (-1/n, 1/n) \subset \mathbb{R}$ をとれば，

(1) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n = \{0\}$,

(2) 一点集合 $\{0\}$ は開集合ではない,

が成り立つ．よって，無限個の開集合の和集合 $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n = \{0\}$ は開集合ではない．

[**(1) の証明**] ($\supset$) $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して，$0 \in U_n$ であり，$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n \supset \{0\}$ はよい．
($\subset$) **アルキメデスの原理**より，$\forall \varepsilon > 0$ に対して，$\exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall n > N$ なる $n \in \mathbb{N}$ に対して，$|0 - 1/n| = |1/n| < \varepsilon$ となる (自然数列 $\{1/n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は 0 に収束する; $\lim_{n \to \infty} 1/n = 0$)．よって，任意の正の実数 $\varepsilon > 0$ に対して，$\varepsilon \notin \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$ である．同様に，$-\varepsilon \notin \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$ である．すなわち，0 以外の実数が $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$ に入っていると仮定すると矛盾が生じる．よって，$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n \subset \{0\}$.

[**(2) の証明**] $\forall x \in \{0\}$ とは，$x = 0$ のことであるが，$B(0;\varepsilon) \subset \{0\} \Longrightarrow \varepsilon = 0$ であり，$\forall \varepsilon > 0$ に対して，点 $x = 0$ の ε-近傍はとれない．

[**注意**] 上と同様，$\mathbb{R}^n$ において一点集合 $\{a\}$ は開集合でない (ことが示せる ← 考えてみる!).

[**注意**] 「アルキメデスの原理が成り立つ」のは当たり前のことではなく，**実数の公理**から証明される (証明すべき) ことであった (第7回プリント [保存版] 参照)．一般に距離空間 (X, d) では，$\mathbb{Q} \subset X$ だとしても，アルキメデスの原理が (従って，(1) も) 成り立つとは限らない (!). (例えば，**[5]** の $(\mathbb{Z}, d^{(p)})$ のような距離空間 ($\forall n \in \mathbb{N}$ に対して，$d^{(p)}(0,n) \le 1$) もある．)