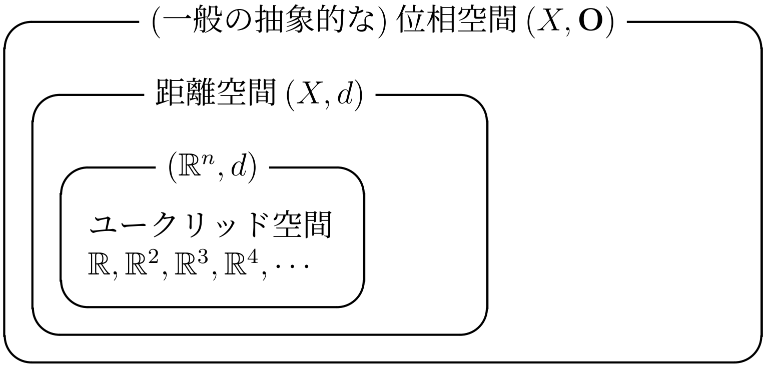
位相空間論A（第１回・2008/04/11）



集合 X の２つの元 x, y が "近い", "遠い" とは?

集合 X にキョリが定まっていると，収束や連続性のギロンができる?

空間 (集合) の中のキョリとは?

キョリのない空間ではどうするか? →(一般の) 位相空間論 (後期)

定義１ (集合 X 上の距離)． 空でない集合 X に対し，直積集合 $X \times X$ 上の実数値関数 $d : X \times X \to \mathbb{R}$ が次の３つの条件を満たすとき，d を X 上の**距離**または**距離関数 (distance function)** という．

(D1) 任意の $x, y \in X$ に対して，$d(x, y) \geq 0$ が成り立つ．
　　また，$d(x, y) = 0$ となるのは $x = y$ のときであり，またそのときに限る．

(D2) 任意の $x, y \in X$ に対して，$d(x, y) = d(y, x)$ が成り立つ．

(D3) 任意の $x, y, z \in X$ に対して，$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ が成り立つ．

条件 (D3) を**三角不等式**という．論理記号 $\forall$ (All の A をひっくり返したもの，もともとはドイツ語のアル (all)，全称記号という) を用いて以下のようにも書ける．但し，声に出して読む場合 (日本語で説明する場合) には，結局上記の様に "任意の" となる．

(D1) $\forall x, y \in X$ に対して，$d(x, y) \geq 0$．また，$d(x, y) = 0 \iff x = y$．

(D2) $\forall x, y \in X$ に対して，$d(x, y) = d(y, x)$．

(D3) $\forall x, y, z \in X$ に対して，$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$．

定義２ (距離空間)． 距離 (関数) d が定義された (空でない) 集合 X を**距離空間 (metric space)** といい，(X, d) で表す．距離 d が明確に指定されているとき，d を省略して単に X と書くこともある．X の各元 (要素) をまた**点**ともよぶ．２点 $x, y \in X$ に対して，$d(x, y)$ を **x と y の間の距離**という．

注意． 集合 X 上に距離 (関数) を定義するという事は，任意の２点 $x, y \in X$ に対して，x と y の間の距離を定めるという事である．

定義３ (ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$)． $\mathbb{R}$ を実数全体の集合，$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ (n 個の直積) とする．$\mathbb{R}^n$ の２点 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ に対して，**ユークリッドの距離** d_2 を次で定める：

$$d_2(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

このとき，d_2 は $\mathbb{R}^n$ 上の距離 (関数) となり (問 [**3**]), 距離空間 $(\mathbb{R}^n, d_2)$ を**ユークリッド空間**という．

例４ (離散距離空間)． 空でない集合 X に対し，関数 $d_0 ; X \times X \to \mathbb{R}$ を

$$d_0(x, y) := \begin{cases} 0, & (x = y \text{ のとき}), \\ 1, & (x \neq y \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定めると，d_0 は X 上の距離となる (問 [**4**])．d_0 を**離散距離**，(X, d_0) を**離散距離空間 (discrete metric space)** とよぶ．

注意． 異なる距離 d, d' が与えられた距離空間 (X, d), (X, d') は集合としては同じものだが，それぞれ別々の距離が定められており，距離空間としては区別することにする．

例５ ($\mathbb{R}^n$ 上の距離の例)． $\mathbb{R}^n$ の２点 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ に対して，距離 d_1 および d_∞ を以下の様に定義する：

$$d_1(x, y) := |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \cdots + |x_n - y_n|,$$
$$d_\infty(x, y) := \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \cdots, |x_n - y_n|\}.$$

このとき d_1, d_∞ は $\mathbb{R}^n$ 上の距離 (関数) となり (問 [**5**]), $(\mathbb{R}^n, d_1)$ と $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ は距離空間となる．

注意． ユークリッド空間 $(\mathbb{R}^n, d_2)$ と距離空間 $(\mathbb{R}^n, d_0), (\mathbb{R}^n, d_1), (\mathbb{R}^n, d_\infty)$ は，集合としては全く同じ $\mathbb{R}^n$ であるが，距離空間としては区別する．特に，後者の 3 つはユークリッド空間とは呼ばない．

例 6 ($C[0,1]$ 上の距離の例)． 集合 X として，

$$C[0,1] := \{f \mid f \text{ は閉区間 } [0,1] \text{ 上で定義された実数値連続関数}\}$$

をとる．$C[0,1]$ の 2 点 $f, g \in C[0,1]$ に対して，距離 d_1 および d_∞ を以下の様に定義する．

$$d_1(f,g) := \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx,$$
$$d_\infty(f,g) := \max\nolimits_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$$

($|f - g| \in C[0,1]$ より最大値が存在 [閉区間上の実数値連続関数は最大値を持つ])．このとき d_1, d_∞ は $X = C[0,1]$ 上の距離 (関数) となり (問 [**9**])，$(C[0,1], d_1)$ と $(C[0,1], d_\infty)$ は距離空間となる．

例 7 ($M_2(\mathbb{R})$ 上の距離の例)． 集合 X として，実数を成分とする 2×2 行列全体の集合 $M_2(\mathbb{R})$ をとる．行列 $A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le 2} \in M_2(\mathbb{R})$ の成分を 1 列に並べる事によって，全単射

$$h : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^4, \quad A \longmapsto (a_{1,1}, a_{1,2}, a_{2,1}, a_{2,2})$$

が得られる．このとき，2 点 $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ の距離を $d(A,B) := d_2(h(A), h(B))$, 但し d_2 は $\mathbb{R}^4$ におけるユークリッドの距離，と定義すれば $(M_2(\mathbb{R}), d)$ は距離空間をなす．

例 8 ($\mathbb{Z}$ 上の距離の例)． 集合 $X = \mathbb{Z}$ とし，素数 p を 1 つ固定する．2 点 $x, y \in \mathbb{Z}$ に対して，

$$d(x,y) := \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1/p^r, & x \neq y, \end{cases}$$

但し，r は $p^r \mid (x-y)$ なる最大の整数 $r \in \mathbb{Z}$ とする．このとき d は $\mathbb{Z}$ 上の距離 (関数) となり (問 [**12**])，$(\mathbb{Z}, d)$ は距離空間となる．

小テストの予想問題 (但し，*付きはチャレンジ問題でテストの範囲外とする)

[**1**] 空でない集合 X 上の距離 (関数) の定義を書け ((D1),(D2),(D3) の内容を詳しく説明する)．

[**2**] 条件 (D3) と条件 (D3') $\forall x, y, z \in X$ に対して，$|d(x,z) - d(x,y)| \le d(y,z)$ は同値であることを示せ．($X = \mathbb{R}^2$ のとき，(D3) は「三角形の 2 辺の和は残りの 1 辺よりも大きい」，(D3') は「三角形の 2 辺の差は残りの一辺より小さい」に対応している)

[**3**] (定義 3) d_2 は実際に $\mathbb{R}^n$ 上の距離 (関数) である事を示せ．

[**4**] (例 4) d_0 は実際に $\mathbb{R}^n$ 上の距離 (関数) である事を示せ．

[**5**] (例 5) d_1, d_∞ は実際に $\mathbb{R}^n$ 上の距離 (関数) である事を示せ．

[**6**] 2 点 $x = (1,2,3)$, $y = (-3,-1,0) \in \mathbb{R}^3$ の間の距離 $d(x,y)$, $d_0(x,y)$, $d_1(x,y)$, $d_\infty(x,y)$ を求めよ．

[**7**] 2 点 $x = (2,1)$, $y = (-2,-1) \in \mathbb{R}^2$ をとる．次の距離 d に対して，集合 $\{z \in \mathbb{R}^2 \mid d(x,z) = d(y,z)\}$ を図示せよ：(i) $d = d_2$, (ii) $d = d_0$, (iii) $d = d_1$, (iv) $d = d_\infty$.

[**8**] $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ に対し，不等式 $d_\infty(x,y) \le d_2(x,y) \le d_1(x,y) \le n \cdot d_\infty(x,y)$ を示せ．

[**9**]* (例 6) d_1, d_∞ は実際に $C[0,1]$ 上の距離 (関数) である事を示せ．

[**10**] (例 6) 閉区間 $[0,1]$ 上の実数値連続関数 f, g として，$f(x) = 4x^2 - 4x + 1$, $g(x) = -x(x-2)$ をとる．このとき，2 点 $f, g \in C[0,1]$ の間の距離 $d_1(f,g)$ と $d_\infty(f,g)$ を求めよ．

[**11**] (例 6) $\forall f, g \in C[0,1]$ に対し，不等式 $d_1(f,g) \le d_\infty(f,g)$ を示せ．

[**12**] (例 8) d は実際に $\mathbb{Z}$ 上の距離 (関数) である事を示せ．

[**13**] (例 8) 距離空間 $(\mathbb{Z}, d)$ に対し，$p = 3$ とする．$d(1,4)$, $d(4,10)$, $d(1,10)$, $d(1,28)$, $d(1,82)$, $d(1,244)$ を計算し，一番距離 d が小さい (近い) ものを答えよ．