位相空間論A（第10回・2008/06/20）

命題1 (連続写像と点列の関係). 距離空間 (X,d), (X',d'), 部分集合 $A \subset X$ の点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対して，$f: X \to X'$ が連続写像ならば，次が成り立つ：$\lim_{i\to\infty} x_i = \alpha \implies \lim_{i\to\infty} f(x_i) = f(\alpha)$.

定義2 (部分距離空間 (metric subspace)). 距離空間 (X,d)，部分集合 $A \subset X$ に対して，A 上の距離を $a,b \in A$ に対して，$d_A(a,b) := d(a,b)$ として定めたとき，(A,d_A) を (X,d) の**部分距離空間**といい，$(A,d_A) \subset (X,d)$ とかく．(つまり，$d_A := d|_{A\times A}$; X 上の距離 d の $A \times A$ への制限)

例. ユークリッド距離 d_2 をそのまま適用した $(\mathbb{N},d_2)$, $(\mathbb{Z},d_2)$, $(\mathbb{Q},d_2)$ は $(\mathbb{R},d_2)$ の部分距離空間.

命題3 (部分距離空間の開集合，閉集合). 部分距離空間 $(A,d_A) \subset (X,d)$，部分集合 $B \subset A \subset X$ に対して，(定義から) 点 $a \in A$ の (A,d_A) における ε-近傍 $B_{d_A}(a;\varepsilon)$ は，(X,d) における ε-近傍 $B_d(a;\varepsilon)$ に対し，$B_{d_A}(a;\varepsilon) = B_d(a;\varepsilon) \cap A$ となる．さらに，以下が成り立つ：
(1) U' が (A,d_A) の開集合 $\iff \exists U \in \mathfrak{O}_d(X)$ s.t. $U' = U \cap A$,
(2) F' が (A,d_A) の閉集合 $\iff \exists F \in \mathfrak{A}_d(X)$ s.t. $F' = F \cap A$.

定理4 (閉集合と完備性の関係). 完備距離空間 (X,d)，部分距離空間 $(A,d_A) \subset (X,d)$ に対して，(A,d_A) は完備 $\iff$ A は X の閉集合.

定義5 (点列コンパクト (sequentially compact)). 距離空間 (X,d)，部分集合 $A \subset X$ に対して，A の任意の点列が A の点に収束する部分列をもつとき，A を**点列コンパクト**という.

定義6 (被覆 (cover)，開被覆 (open cover)).
距離空間 (X,d), 部分集合 $A \subset X$ に対して，$A \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ を満たす X の部分集合族 $C = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を A の**被覆**といい，C は A を**覆う**という．特に，開集合からなる A の被覆を A **の開被覆**という.

定義7 (部分被覆 (subcover)，有限部分被覆 (finite subcover)).
距離空間 (X,d)，部分集合 $A \subset X$ に対して，A の被覆 C が有限集合のとき，C を**有限被覆**という. A の被覆 C の部分集合 $C' \subset C$ が A の被覆となるとき，C' を C の**部分被覆**といい，C は部分被覆 C' をもつという．特に，有限集合からなる部分被覆を**有限部分被覆**という.

定義8 (コンパクト (compact)).
距離空間 (X,d)，部分集合 $A \subset X$ に対して，任意の A の開被覆 (open cover) が有限部分被覆 (finite subcover) をもつとき，A は**コンパクト** (または，**コンパクト集合**) であるという．特に，X 自身がコンパクトのとき，(X,d) を**コンパクト距離空間**という.

例9. ユークリッド空間 $(\mathbb{R},d_2)$ はコンパクトではない.

命題10. 距離空間 (X,d)，コンパクト集合 $A \subset X$ に対して，
部分集合 $B \subset A$ が閉集合 $\implies B$ はコンパクト.

命題11. 距離空間 (X,d) に対して，$A \subset X$ はコンパクト $\implies A$ は有界閉集合.

定理12 (Bolzano-Weierstrass の定理 (集積点定理)).
距離空間 (X,d)，コンパクト集合 $A \subset X$ に対して，
$B \subset A$ は無限部分集合 $\implies B$ は少なくとも1つ集積点をもつ.

系13. コンパクト距離空間の無限集合は集積点をもつ.

定理14. 距離空間 (X,d)，部分集合 $A \subset X$ に対して，
A はコンパクト $\implies A$ は点列コンパクト.

定義15 (全有界 (totally bounded)). 距離空間 (X,d)，部分集合 $A \subset X$ に対して，A が**全有界**であるとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，A の有限被覆 $A \subset \bigcup_{i=1}^m U_i$ で，$\delta(U_i) < \varepsilon$ (各 U_i の直径が ε 未満) となるものがとれることをいう.

命題16. 距離空間 (X,d)，部分集合 $A \subset X$ に対して，A は全有界 $\implies A$ は有界.

命題17. ユークリッド空間 $(\mathbb{R}^n,d_2)$，部分集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ に対して，A は全有界 $\iff$ A は有界.

定理18 (コンパクト距離空間の特徴付け).
距離空間 (X,d)，部分集合 $A \subset X$ に対して，次は同値である：
(i) A はコンパクト,
(ii) A は点列コンパクト,
(iii) 部分空間 (A,d_A) は完備かつ全有界.

系 19 (ユークリッド空間のコンパクト集合)．
ユークリッド空間 $(\mathbb{R}^n, d)$，部分集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ に対して，
A はコンパクト $\iff$ A は点列コンパクト $\iff$ A は有界閉集合．

系 19 は，次の 2 つの定理を含んでいることに注意しておく．

定理 20 (ハイネ–ボレル (Heine-Borel) の被覆定理)．
ユークリッド空間 $(\mathbb{R}^n, d_2)$ の有界閉集合はコンパクト．特に，$\mathbb{R}$ の閉区間 $[a, b]$ はコンパクト．

定理 (B-W) (Bolzano-Weierstrass)． 有界な実数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は収束する部分列をもつ．

この 2 つの定理は，区間縮小法とアルキメデスの原理を用いて直接，証明することができる (**問** [8], [9])．(定理 (B-W) は第 7 回のプリント [保存版] を参照)

---

[1] 命題 1 を示せ．(ヒント　定義から示される．微分積分学で学んだ $(\mathbb{R}, d_2)$ のときの証明と同じ)

[2] 命題 3 (1), (2) を示せ．(ヒント　(1) を示せば，(2) は (1) を使って得られる)

[3] 距離空間 (X, d_X)，(Y, d_Y) と連続写像 $f : X \to Y$ に対して，
$A \subset X$ は点列コンパクト $\Longrightarrow$ $f(A)$ は点列コンパクトを示せ．

[4] 距離空間 (X, d)，部分集合 $A, B \subset X$ に対して，
A, B は点列コンパクト $\Longrightarrow$ $A \cup B$, $A \cap B$ はどちらも点列コンパクトを示せ．

[5] 例 9 を (命題 11 を使わずに，定義から直接) 示せ．

[6] 距離空間 (X, d_X)，(Y, d_Y) と連続写像 $f : X \to Y$ に対して，
$A \subset X$ はコンパクト $\Longrightarrow$ $f(A)$ はコンパクトを示せ．

[7] 距離空間 (X, d)，部分集合 $A, B \subset X$ に対して，
A, B はコンパクト $\Longrightarrow$ $A \cup B$, $A \cap B$ はどちらもコンパクトを示せ．

[8] (定理 20) $(\mathbb{R}, d_2)$ における閉区間 $[a, b]$ はコンパクトを示せ．
(ヒント　背理法 & 区間縮小法 & アルキメデスの原理を使う)

[9] 定理 (B-W) を示せ．(ヒント　区間縮小法 & アルキメデスの原理を使う)

[**解けない問題を調べるには，例えば，次のような本があります**] (実際に，この講義で参考にさせて頂いた本)．
格安な本もあるので，買ってもよし，図書館で調べてもよし．(← 行動あるのみ (!))

⟨**1**⟩ 集合と位相への入門–ユークリッド空間の位相–, 鈴木 晋一 (著), 161 ページ, サイエンス社 (2003), 1733 円.
⟨**2**⟩ 理工基礎 演習 集合と位相, 鈴木 晋一 (著), 217 ページ, サイエンス社 (2005), 1943 円.
⟨**3**⟩ 集合・位相空間要論, 青木 利夫, 高橋 渉 (共著), 188 ページ, 培風館 (1979), 絶版 (とても残念).
⟨**4**⟩ 演習・集合位相空間, 青木 利夫, 高橋 渉, 平野載倫 (共著), 200 ページ, 培風館 (1985), 2625 円.
⟨**5**⟩ 集合と位相, 鎌田 正良 (著), 183 ページ, 近代科学社 (1989), 1995 円.
⟨**6**⟩ はじめよう位相空間, 大田 春外 (著), 228 ページ, 日本評論社 (2000), 2310 円.
⟨**7**⟩ 解いてみよう位相空間, 大田 春外 (著), 258 ページ, 日本評論社 (2006), 2520 円.

[**文庫本 (!) もあります**]

⟨**8**⟩ 位相のこころ (ちくま学芸文庫), 森 毅 (著), 330 ページ, 筑摩書房 (2006), 1260 円.

[**いまだに，$\varepsilon - \delta$ 論法がピンとこない人．(← なぜ，必要なんだろうか？)**]

⟨**9**⟩ イプシロン–デルタ (数学ワンポイント双書 20), 田島 一郎 (著), 128 ページ, 共立出版 (1978), 1365 円.
⟨**10**⟩ 解析入門 (岩波全書 325), 田島 一郎 (著), 293 ページ, 岩波書店 (1981), 2310 円.

[**微分積分学の内容を，もう一度しっかりと復習してみたい (!) 人**]

⟨**11**⟩ 解析入門 I, 杉浦 光夫 (著), 428 ページ, 東京大学出版会 (1980), 2940 円.
⟨**12**⟩ 解析入門 I, 小平 邦彦 (著), 251 ページ, 岩波書店; 軽装版 (2003), 2520 円.

[**実数の公理の証明，デデキントの切断，完備化がとても気になる (!) 人**]

⟨**13**⟩ 数学の基礎—集合・数・位相, 齋藤 正彦 (著), 277 ページ, 東京大学出版会 (2002), 2940 円.