位相空間論A（第12回・2008/07/04）

定義 1 (非連結，連結でない (disconnected))．
距離空間 (X,d), 部分集合 $A \subset X$ に対して，次の 3 つの条件を満たす開集合 U, V が存在するとき，A は**連結でない**または**非連結 (不連結)** であるという (U, V は A を**分離する開集合**と呼ばれる)：
(DC1) $A \subset U \cup V$,　(DC2) $U \cap V = \emptyset$,　(DC3) $U \cap A \neq \emptyset$ かつ $V \cap A \neq \emptyset$.

定義 2 (連結 (connected))．
距離空間 (X,d)，部分集合 $A \subset X$ に対して，A が非連結でないとき，**連結**であるという．

命題 3． 距離空間 (X,d) に対して, (i) 1 点集合 $\{a\} \subset X$ は連結, (ii) 2 点集合 $\{a,b\} \subset X$ は非連結.

定理 4 (開かつ閉集合)． 距離空間 (X,d) に対して，次が成り立つ：
(i) X は連結 $\iff$ X の部分集合で開集合かつ閉集合となるものは X と $\emptyset$ のみ,
(ii) X は非連結 $\iff$ X と $\emptyset$ 以外に開集合かつ閉集合となる X の部分集合が存在.

例 5 (離散距離空間の開集合と閉集合)．
離散距離空間 (X,d_0) の任意の部分集合は開集合かつ閉集合．特に，(X,d_0) は非連結である．

命題 6． 距離空間 (X,d) に対して，部分集合 $A \subset X$ が連結かつ $A \subset B \subset \overline{A} \Longrightarrow B$ は連結.

命題 7． 距離空間 (X,d), (X',d') に対して，$f : X \to X'$ を連続写像とする.
このとき，部分集合 $A \subset X$ は連結 $\Longrightarrow f(A) \subset X'$ は連結.

命題 8． 距離空間 (X,d) に対して，$\{A_\lambda \,|\, \lambda \in \Lambda\}$ を X の連結な部分集合族とする.
$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \neq \emptyset \Longrightarrow$ 和集合 $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ は連結.

定理 9 ($\mathbb{R}$ は連結)． $\mathbb{R}$ は連結である.

系 10 ($\mathbb{R}$ の開区間，閉区間は連結)． $\mathbb{R}$ の開区間 (a,b)，閉区間 $[a,b]$ は連結.

定義 11 (連結成分 (connected component))． 距離空間 (X,d) の点 $x \in X$ に対して，x を含む X の連結集合の全体 $\{A_\lambda \,|\, \lambda \in \Lambda\}$ の和集合 $C(x) := \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ を**点 x を含む連結成分**という.

定理 12． 距離空間 (X,d) に対して，次が成り立つ：
(i) 点 $x \in X$ に対して，$C(x)$ は x を含む X の最大の連結集合,
(ii) 点 $x, y \in X$ に対して，$C(x) \cap C(y) \neq \emptyset \iff C(x) = C(y)$.

注意 13． 定理 12 より，$C(x) = C(y)$ なるとき，$x \sim y$ とすれば，$\sim$ は X 上の同値関係を与え，X の類別 $X = \bigcup C(x)$, $X/\!\sim = \{C(x) \,|\, x \in X\}$ がおこる．X が連結 $\iff$ $\forall x \in X$ に対して $C(x) = X$.

定義 14 (完全不連結 (totally disconnected))． 距離空間 (X,d)，部分集合 $A \subset X$ に対して，各点 $a \in A$ の連結成分が全て一点集合である (つまり任意の $a \in A$ に対して，$C(a) = \{a\}$ となる) とき，A を**完全不連結**という.

命題 15． ユークリッド空間 $(\mathbb{R}, d_2)$ に対して，$\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ は完全不連結.

定義 16 (道 (path))． 距離空間 (X,d)，部分集合 $A \subset X$ に対して，閉区間 $[0,1] \subset \mathbb{R}$ から部分距離空間 $(A, d_A) \subset (X,d)$ への連続写像 $f : [0,1] \to A$ を A における**道 (path)**，点 $f(0)$ をその**始点**，点 $f(1)$ をその**終点**という．また，このとき A の 2 点 $f(0)$ と $f(1)$ は道 f によって**結ばれる**という.

定義 17 (弧状連結 (path-connected))． 距離空間 (X,d) の部分空間 $(A,d_A) \subset (X,d)$ は，A の任意の 2 点が道によって結ばれるとき，**弧状連結**であるという.

命題 18． 距離空間 (X,d), (X',d') に対して，$f : X \to X'$ を連続写像とする.
このとき，部分集合 $A \subset X$ は弧状連結 $\Longrightarrow f(A) \subset X'$ は弧状連結.

命題 19． 距離空間 (X,d) に対して，$\{A_\lambda \,|\, \lambda \in \Lambda\}$ を X の弧状連結な部分集合族とする.
$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \neq \emptyset \Longrightarrow$ 和集合 $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ は弧状連結.

命題 20． 距離空間 (X,d) に対して，X は弧状連結 $\Longrightarrow X$ は連結.

---

[1] 例 5 を示せ．(ヒント $A \subset X$ が閉集合 $\iff$ $A^d \subset A$)

[2] $(\mathbb{R}, d_2)$ に対して，有理数全体 $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$，無理数全体 $\mathbb{Q}^c \subset \mathbb{R}$ はともに非連結であることを示せ．さらには，(より強く) 完全不連結であることを示せ．（ヒント　有理数 (無理数) の稠密性)

[3] 命題 20 の逆は，一般には成り立たないことを示せ．(ヒント 反例を具体的に挙げる)