位相空間論Ａ（第13回・2008/07/11）[第12回の補足]

定義 1 (非連結，連結でない (disconnected))．
距離空間 (X,d), 部分集合 $A \subset X$ に対して，次の3つの条件を満たす開集合 U, V が存在するとき，A は**連結でない**または**非連結 (不連結)** であるという (U, V は A を**分離する開集合**と呼ばれる)：
(DC1) $A \subset U \cup V$,　(DC2) $U \cap V = \emptyset$,　(DC3) $U \cap A \neq \emptyset$ かつ $V \cap A \neq \emptyset$.

定義 2 (連結 (connected))．
距離空間 (X,d)，部分集合 $A \subset X$ に対して，A が非連結でないとき，**連結**であるという．

命題 3． 距離空間 (X,d) に対して, (i) 1点集合 $\{a\} \subset X$ は連結, (ii) 2点集合 $\{a,b\} \subset X$ は非連結.

証明

(i) X の任意の開集合 $U, V\ (\neq \emptyset)$ が (DC1) $\{a\} \subset U \cup V$ かつ (DC2) $U \cap V = \emptyset$ を満たすとき，(DC3) $U \cap A \neq \emptyset$ かつ $V \cap A \neq \emptyset$ を満たさないことを言えばよい．
(DC1) より，$a \in U \cup V$ で $a \in U$ または $a \in V$.
(DC2) より，$a \in U \Longrightarrow a \notin V$, $a \in V \Longrightarrow a \notin V$.
よって，(DC3) $U \cap \{a\} \neq \emptyset$ かつ $V \cap \{a\} \neq \emptyset$ を満たすことはない
(ii) $\varepsilon := d(a,b)$，$U := B(a;\varepsilon/2), V := B(b;\varepsilon/2)$ とおけば，(DC1),(DC2),(DC3) を満たしている．□

定理 4 (開かつ閉集合)． 距離空間 (X,d) に対して，次が成り立つ：
(i) X は連結 $\iff$ X の部分集合で開集合かつ閉集合となるものは X と $\emptyset$ のみ,
(ii) X は非連結 $\iff$ X と $\emptyset$ 以外に開集合かつ閉集合となる X の部分集合が存在.

証明

(i) $\iff$ (ii) であるので，(ii) の方を示す．
($\Longrightarrow$) (DC1), (DC2) より，$U = X - V, V = X - U$ であり，U, V は共に閉集合.
また，(DC3) より，$U \neq \emptyset, V \neq \emptyset$ なので $U \neq X$ かつ $V \neq X$ でもある．
($\Longleftarrow$) $U \subset X$ を開集合かつ閉集合で，$U \neq \emptyset, U \neq X$ とする．このとき，$V = X - U$ は X の開集合で U と V は X を分離する．よって，X は非連結である．□

例 5 (離散距離空間の開集合と閉集合)．
離散距離空間 (X,d_0) の任意の部分集合は開集合かつ閉集合．特に，(X,d_0) は非連結である．

証明

任意の部分集合 $A \subset X$ に対して，$A \subset X$ は閉集合 $\iff$ $A^d \subset A$ であった．しかし，$\forall x \in X$ は A の集積点にはなり得ない ($\because$ $B(x;1/2)$ は x のみを含む)．よって，$A^d = \emptyset$ より $A \subset X$ は閉集合である．また，同様に，$(A^c)^d = \emptyset$ より，$A^c \subset X$ は閉集合であるから，A は開集合でもある．□

命題 6． 距離空間 (X,d) に対して，部分集合 $A \subset X$ が連結かつ $A \subset B \subset \overline{A} \Longrightarrow B$ は連結.

証明

対偶を示す．B が非連結 $\Longrightarrow \exists U, V$; 開集合 s.t. U, V は B を分離する $\Longrightarrow$(DC3) より，$\exists x \in U \cap B$.
ここで，$B \subset \overline{A}$ より $x \in \overline{A}$．よって，x に収束する点列 $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ が存在する．このとき，$\exists \varepsilon > 0$ s.t. $B(x;\varepsilon) \subset U \Longrightarrow x_i \to x\ (i \to \infty)$．この $\varepsilon > 0$ に対して，$\exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall k \in \mathbb{N}, k > N \Longrightarrow d(x_k, x) < \varepsilon$．いま，$x_k \in B(x;\varepsilon) \subset U$ より $U \cap A \neq \emptyset, x_k \in U \cap A$ である．よって，$V \cap A \neq \emptyset$ であり，同様に $V \cap A \neq \emptyset$．さらには，$A \subset B$ より $A \subset U \cup V$ だから，U と V は A を分離する開集合である．□

命題 7． 距離空間 (X,d), (X',d') に対して，$f : X \to X'$ を連続写像とする．
このとき，部分集合 $A \subset X$ は連結 $\Longrightarrow f(A) \subset X'$ は連結.

証明

対偶を示す．$f(A) \subset X'$ が非連結 $\Longrightarrow U, V \subset X'$; 開集合が存在して，$f(A)$ を分離する $\Longrightarrow U_0 := f^{-1}(U), V_0 := f^{-1}(V)$ は X の開集合で ($\because$ f は連続)，$\forall \alpha \in A$ に対して，$f(a) \in f(A) \subset U \cup V$ より，$a \in f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) = U_0 \cup V_0$．よって，(DC1) $A \subset U_0 \cup V_0$ が成り立つ.
また，$\exists x \in U_0 \cap V_0 \Longrightarrow f(x) \in U \cap V \neq \emptyset$ となり，U, V に対する (DC2) に反する．よって，(DC2) $U_0 \cap V_0 = \emptyset$ も成立する．
さらに，$f(A) \cap U \neq \emptyset$ より，$\exists b \in f(A) \cap U$ であり，$b \in f(A)$ から $\exists a \in A$ s.t. $f(a) = b \in U$ を得る．これより，$a \in U_0$ で $A \cap U_0 \neq \emptyset$．同様に，$A \cap V_0 \neq \emptyset$ であり，U_0, V_0 は (DC3) を満たす.
以上より，U_0, V_0 は A を分離する開集合である．□

命題 8． 距離空間 (X,d) に対して，$\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を X の連結な部分集合族とする．
$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \neq \emptyset \Longrightarrow$ 和集合 $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ は連結.

証明

(背理法) $A := \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ が非連結を仮定して，矛盾を導く.
A が非連結 $\Longrightarrow$ A を分離する開集合 U, V が存在する．よって，$a \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda (\neq \emptyset)$ を選び，$a \in A \subset U \cup V$ で $U \cap V \neq \emptyset$ より $a \in U$ と仮定してよい．各 $\lambda \in \Lambda$ に対して，$a \in A_\lambda \cap U$ より $A_\lambda \cap U \neq \emptyset$ である．もし，$\exists \mu \in \Lambda$ s.t. $A_\mu \cap V \neq \emptyset$ ならば U, V は A_μ を分離する開集合であり A_μ の連結性に反する．よって，各 $\lambda \in \Lambda$ について $A_\lambda \cap V = \emptyset$ である．しかし，これは $V \cap A \neq \emptyset$ に矛盾する． □

定理 9 ($\mathbb{R}$ は連結)． $\mathbb{R}$ は連結である.

証明

(背理法) $\mathbb{R}$ が非連結 $\Longrightarrow$ $\mathbb{R}$ を分離する開集合 U, V が存在する；
$\mathbb{R} = U \cup V,\ U \cap V = \emptyset,\ U \neq \emptyset,\ V \neq \emptyset$.
いま，$a \in U$ をとり $B = \{x \in \mathbb{R} \mid (x, a] \subset U\}$, $C = \{x \in \mathbb{R} \mid [a, x) \subset U\}$ とおくと，$B \neq \emptyset, C \neq \emptyset$.
$\sup C$ と $\inf B$ が両方ない $\Longrightarrow$ $U = \mathbb{R}$ で $V \neq \emptyset$ に反する．よって，$\exists c = \sup C$．このとき，$c \notin V$ ($\because$ $c \in V \Longrightarrow \exists \delta > 0$ s.t. $(c-\delta, c+\delta) \subset V$ かつ $(c-\delta, c+\delta) \cap U = \emptyset$. 一方，$\sup C = c$ より $\forall \varepsilon > 0$ に対して，$(c-\varepsilon, c+\varepsilon) \cap U \neq \emptyset$ より矛盾).
また，$c \notin U$ ($\because$ $c \in U \Longrightarrow [a, c) \subset U$ であり，$\exists \delta > 0$ s.t. $[a, c+\delta) \subset U$. これは，c が上限に反する).
以上より，$c \notin U \cup V$ であるが，これは $\mathbb{R} = U \cup V$ に矛盾する．よって，$\mathbb{R}$ は連結. □

系 10 ($\mathbb{R}$ の開区間，閉区間は連結)． $\mathbb{R}$ の開区間 (a, b)，閉区間 $[a, b]$ は連結.

証明

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = \dfrac{b-a}{\pi} \tan^{-1} x + \dfrac{a+b}{2}$ とすれば，f は連続で，$-\dfrac{\pi}{2} \leq \tan^{-1}(x) \leq \dfrac{\pi}{2}$ より，
$a \leq f(x) \leq b$．命題 7 より，$f(\mathbb{R}) = (a, b)$ は連結で，命題 6 より $[a, b] = \overline{(a, b)}$ も連結. □

定義 11 (連結成分 (connected component))． 距離空間 (X,d) の点 $x \in X$ に対して，x を含む X の連結集合の全体 $\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ の和集合 $C(x) := \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ を**点 x を含む連結成分**という.

定理 12． 距離空間 (X,d) に対して，次が成り立つ：
(i) 点 $x \in X$ に対して，$C(x)$ は x を含む X の最大の連結集合,
(ii) 点 $x, y \in X$ に対して，$C(x) \cap C(y) \neq \emptyset \iff C(x) = C(y)$.

証明

(i) $x \in C(x)$ であり，命題 8 より，$C(x) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ は連結．また，$B \subset X$ は連結かつ $x \in B \Longrightarrow B \subset C(x)$ も成り立つ.
(ii) ($\Longrightarrow$) $C(x) \cap C(y) \neq \emptyset \Longrightarrow C(x) \cup C(y)$ は連結 ($\because$ 命題 8)．(i) より，$C(x) = C(x) \cup C(y) = C(y)$ となる．($\Longleftarrow$) 明らか. □

注意 13． 定理 12 より，$C(x) = C(y)$ なるとき，$x \sim y$ とすれば，$\sim$ は X 上の同値関係を与え，X の類別 $X = \bigcup C(x)$, $X/\!\sim\, = \{C(x) \mid x \in X\}$ がおこる．X が連結 $\iff$ $\forall x \in X$ に対して $C(x) = X$.

定義 14 (完全不連結 (totally disconnected))． 距離空間 (X,d)，部分集合 $A \subset X$ に対して，各点 $a \in A$ の連結成分が全て一点集合である (つまり任意の $a \in A$ に対して，$C(a) = \{a\}$ となる) とき，A を**完全不連結**という.

命題 15． ユークリッド空間 $(\mathbb{R}, d_2)$ に対して，$\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ は完全不連結.

証明

$m, n \in \mathbb{Z}, (m < n)$ とし，m, n を含む $\mathbb{Z}$ の部分集合を M とする．$a = m + 1/2$ とすれば，$m < a < n$ かつ $a \in \mathbb{Z}^c$ である．いま，$U = (-\infty, a), V = (a, \infty)$ とすれば，U, V は $\mathbb{R}$ の開集合であり，$M \subset U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$, $m \in M \cap U \neq \emptyset$, $n \in M \cap V \neq \emptyset$ を満たす．よって，U と V は M を分離する開集合であり，M は非連結である．$\mathbb{Z}$ の 2 点を含むような $\mathbb{Z}$ の部分集合は全て非連結であるから，任意の点 $m \in \mathbb{Z}$ の連結成分は 1 点集合 $\{m\}$ である．すなわち，$\mathbb{Z}$ は完全不連結. □

定義 16 (道 (path))． 距離空間 (X,d)，部分集合 $A \subset X$ に対して，閉区間 $[0,1] \subset \mathbb{R}$ から部分距離空間 $(A,d_A) \subset (X,d)$ への連続写像 $f:[0,1] \to A$ を A における**道 (path)**，点 $f(0)$ をその**始点**，点 $f(1)$ をその**終点**という．また，このとき A の 2 点 $f(0)$ と $f(1)$ は道 f によって**結ばれる**という．

定義 17 (弧状連結 (path-connected))． 距離空間 (X,d) の部分空間 $(A,d_A) \subset (X,d)$ は，A の任意の 2 点が道によって結ばれるとき，**弧状連結**であるという．

命題 18． 距離空間 (X,d), (X',d') に対して，$f:X \to X'$ を連続写像とする．
このとき，部分集合 $A \subset X$ は弧状連結 $\Longrightarrow$ $f(A) \subset X'$ は弧状連結.

証明

$x,y \in f(A)$ に対して，$\exists a,b \in A$ s.t. $f(a)=x$, $f(b)=y$. A は弧状連結より，$\exists$ 道 $g:[0,1] \to A$, $g(0)=a$, $g(1)=b$. このとき，合成写像 $f \circ g:[0,1] \to f(A)$ は連続 ($\because$ $\mathbb{R}$ の場合と同様，定義から示せる) で，$(f\circ g)(0)=f(g(0))=f(a)=x$, $(f\circ g)(1)=f(g(1))=f(b)=y$. つまり，$f\circ g$ は x と y を結ぶ道である． □

命題 19． 距離空間 (X,d) に対して，$\{A_\lambda \,|\, \lambda \in \Lambda\}$ を X の弧状連結な部分集合族とする．
$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \neq \emptyset \Longrightarrow$ 和集合 $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ は弧状連結.

証明

$a \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda}$ を選ぶと，$\forall\lambda\in\Lambda, \forall x,y \in A_\lambda$ に対し，a と x，a と y は A_λ の道で結ばれる ($\leftarrow$ 各自，なぜか考える!)．よって，$\forall x,y \in A$ は A の道で結ばれる． □

命題 20． 距離空間 (X,d) に対して，X は弧状連結 $\Longrightarrow$ X は連結.

証明

ある $a \in X$ をとる．$\forall x \in X$ に対して，$\exists$ 道 $f:[0,1] \to X, f(0)=a, f(1)=b$. 系 10 より，[0,1] は連結であり，命題 7 より $f([0,1])$ は連結 ($\because$ f は連続)．よって，$a,x \in f([0,1])$ に対して，$C(a)=C(x)$. ここで，$x \in X$ は任意だったので $C(a)=X$ となる． □

---

[2] $(\mathbb{R},d_2)$ に対して，有理数全体 $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$，無理数全体 $\mathbb{Q}^c \subset \mathbb{R}$ はともに非連結であることを示せ．さらには，(より強く) 完全不連結であることを示せ． (ヒント　有理数 (無理数) の稠密性)

証明

命題 15 と同様，$\forall m,n \in \mathbb{Q}, (m<n)$ に対して，m,n を同時に含む部分集合 M は非連結を示す．無理数の稠密性から $\exists a \in \mathbb{Q}^c$ s.t. $m<a<n$ である．$U=(-\infty,a)$, $V=(a,\infty)$ とすれば，U,V は $\mathbb{R}$ の開集合であり，$M \subset U\cup V, U\cap V=\emptyset, m \in M\cap U \neq \emptyset, n \in M\cap V \neq \emptyset$ を満たす．すなわち U と V は M を分離する開集合となる．$\mathbb{Q}$ の 2 点を含むような $\mathbb{Q}$ の部分集合は全て非連結となり，任意の点 $m \in \mathbb{Q}$ の連結成分は 1 点集合 $\{m\}$，すなわち $\mathbb{Q}$ は完全不連結である．$\mathbb{Q}^c$ についても同様． □

[3] 命題 20 の逆は，一般には成り立たないことを示せ．(ヒント 反例を具体的に挙げる)

証明

2 次元ユークリッド空間 $(\mathbb{R}^2,d_2)$ の部分距離空間 $(A,d_A) \subset (\mathbb{R}^2,d_2)$ を次のように定める：
$B=\{(0,y)\,|\,0<y\le 1\}$, $C=\{x,0)\,|\,0<x\le 1\}$, $A_n=\{(\frac{1}{n},y)\,|\,0\le y\le 1\}, (n\in\mathbb{N})$ に対して，

$$A := B \cup C \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$$

このとき，A は連結であるが，弧状連結ではない．

$\because$ $C_n := C \cup A_n$ は弧状連結で，よって連結である ($\because$ 命題 20).
$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n \supset C$ かつ $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n \neq \emptyset$ より，命題 19 (命題 8) から $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n = C \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$ は弧状連結.
よって，連結でもある ($\because$ 命題 20).

ここで，$C \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \subset A \subset \overline{C \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)}$ であるから，命題 6 より A は連結である．
しかし，$(0,1) \in A$ と $(1,0) \in A$ は道では結べない．すなわち，A は弧状連結ではない． □