

位相空間論 A (第 5 回・2008/05/09)

距離空間の (重要な) 例としてユークリッド空間 $(\mathbb{R}^n, d_2)$ を学ぶ.

定義 1 ($\mathbb{R}^n$ における内積). 2 点 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して, $\langle x, y \rangle := x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$ を内積 (inner product) という. 特に, $d_2(x, y) = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$.

定義 2 ($\mathbb{R}^n$ の元のノルム). 点 $x \in \mathbb{R}^n$ のノルム (norm) $\|x\|$ を $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ によって定義する.

注意 3. (1) ノルム $\|x\|$ とは点 x と原点 $0 = (0, 0, \dots, 0)$ との距離 $d_2(x, 0)$ のことである.

(2) $(\mathbb{R}^1, d_2)$ においては, $\|x\| = |x|$ (絶対値) である.

(3) ユークリッド距離 d_2 と内積には上記のような関係があることから, 内積が定義されたベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ のことをユークリッド空間と呼ぶことも多い.

(4) シュワルツの不等式は次のように書ける: $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ に対して, $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$.

$\mathbb{R} = (\mathbb{R}^1, d_2)$ における开区間 $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ を, 次のように一般化する (点 a の近所を定める).

定義 4 (開球, 開球体, ε -近傍). 点 $a \in \mathbb{R}^n$ と正の実数 $r \in \mathbb{R}$ に対し,

$$B(a; r) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, a) < r\}$$

を (距離 d に関する) 点 a を中心とする半径 r の開球 (開球体, open ball) という. 特に, $B(a; \varepsilon)$ を点 a の ε -近傍 (ε -neighborhood) と呼ぶ.

記号の使い方の約束 (論理記号 $\forall$ と $\exists$).

(1) 「任意の $x \in X$ に対して」を「 $\forall x \in X$ に対して」とも書く.

読むときには, “任意の $x \in X$ に対して” 又は “for all (any) x in X ” となる.

(2) 「ある $x \in X$ が存在して [条件] をみたす」ことを「 $\exists x \in X$ s.t. [条件]」とも書く.

“ある $x \in X$ が存在して [条件] をみたす” 又は “there exists x in X such that [条件]” と読む.

定義 5 ($\mathbb{R}^n$ の開集合). 部分集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ が $\mathbb{R}^n$ の開集合 (open set) であるとは,

$$\forall x \in U \text{ に対して, } \exists \varepsilon > 0 \text{ s.t. } B(x; \varepsilon) \subset U$$

(任意の $x \in U$ に対して, ある $\varepsilon > 0$ が存在して, $B(x; \varepsilon) \subset U$) が成り立つことをいう.

命題 6. $\forall a \in \mathbb{R}^n$ と $\forall \varepsilon > 0$ に対して, $B(a; \varepsilon) \subset \mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合である.

命題 7. $\forall a \in \mathbb{R}^n$ と $\forall \varepsilon > 0$ に対して, $A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(a, x) > \varepsilon\} \subset \mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合である.

命題 8. 开区間の直積 $A = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \dots \times (a_n, b_n) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1 < x_1 < b_1, a_2 < x_2 < b_2, \dots, a_n < x_n < b_n\} \subset \mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合である.

系 9. (1) 开区間 (a_1, b_1) は $\mathbb{R}$ の開集合. (2) 开区間の直積 $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合.

定理 10 ($\mathbb{R}^n$ の開集合の性質).

(1) $\mathbb{R}^n$ の有限個の開集合 $U_1, U_2, \dots, U_k$ に対し, 共通部分 $U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_k$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合である.

(2) (有限とは限らない) 集合 Λ の元 λ に対応して, $\mathbb{R}^n$ の開集合族 $\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ が与えられたとき, その和集合 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合である.

注意 11. 定理 10 の (1) を無限個の共通部分とすることはできない. 反例を考えてみる (問 [3]).

定義 12 ($\mathbb{R}^n$ の閉集合). 部分集合 $F \subset \mathbb{R}^n$ の補集合 (complement) $F^c := \mathbb{R}^n - F (= \mathbb{R}^n \setminus F)$ が $\mathbb{R}^n$ の開集合であるとき, F を $\mathbb{R}^n$ の閉集合 (closed set) という.

命題 13. (1) $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合かつ閉集合. (2) $\emptyset \subset \mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合かつ閉集合.

[1] (X, d) を距離空間とする. $\forall x, y \in X$ に対し, $\tilde{d}(x, y) := d(x, y)/(1 + d(x, y))$ とすると, $(X, \tilde{d})$ は距離空間をなすことを示せ. (ヒント $f(x) = x/(1 + x)$ は $x > 0$ において単調増加)

[2] $\mathbb{R}^n$ における, 内積, ノルム, 開球, ε -近傍, 開集合, 閉集合の定義を書け.

[3] 定理 10 を示せ. また, 注意 11 における反例を, $(\mathbb{R}, d_2), (\mathbb{R}^2, d_2)$ それぞれに対して挙げよ.

[4] 集合 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x\}$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合, 集合 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq x\}$ は $\mathbb{R}^2$ の閉集合を示せ.

[5] $\forall a \in \mathbb{R}^n$ に対し, 一点集合 $\{a\}$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合ではないが, $\mathbb{R}^n$ の閉集合であることを示せ.

[6] 次の集合は $\mathbb{R}$ の開集合か? また閉集合か? (1) 开区間 $(0, 1)$ (2) 半开区間 $[0, 1)$ (3) 閉区間 $[0, 1]$.