# 位相空間論A（第7回・2008/05/30）微分積分学の復習 [保存版]

**定義 1 (最大元 (maximum), 最小元 (minimum))．**
部分集合 $A \subset \mathbb{R}$ に対し，$x$ が $A$ **の最大元 (最小元)** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $x \in A$ かつ $\forall a \in A$ に対し，$a \leq x$ $(x \leq a)$.
$A$ の最大元 (最小元) $x \in A$ は，もし存在すれば一意的であり，$x = \max A$ $(x = \min A)$ とかく．

**定義 2 (上界 (upper bound), 下界 (lower bound))．**
部分集合 $A \subset \mathbb{R}$ に対し，$x$ が $A$ **の上界 (下界)** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall a \in A$ に対し，$a \leq x$ $(x \leq a)$.
$A$ の上界 (下界) が存在するとき，$A$ は**上に (下に) 有界**といい，上下に有界のとき単に**有界**という．

**定義 3 (上限 (supremum), 下限 (infimum))．**
部分集合 $A \subset \mathbb{R}$ の上界全体の集合 $U$ (下界全体の集合 $L$) に対し，$U$ の最小元 ($L$ の最大元) が存在するとき，$\sup A := \min U$ $(\inf A := \max L)$ を $A$ の**上限 (下限)** という．(存在すれば一意的である．)

**命題 4．** 部分集合 $A \subset \mathbb{R}$ に対して，以下が成り立つ：
(1) $s = \sup A \iff$ (i) $\forall a \in A$ に対して，$a \leq s$ かつ (ii) $\forall \varepsilon > 0$ に対して，$\exists a \in A$ s.t. $s - \varepsilon < a$,
(2) $t = \inf A \iff$ (i) $\forall a \in A$ に対して，$t \leq a$ かつ (ii) $\forall \varepsilon > 0$ に対して，$\exists a \in A$ s.t. $a < t + \varepsilon$,
(3) $A$ の最大元 (最小元) が存在すれば，$\max A = \sup A$ $(\min A = \inf A)$ である．

**定義 5 ((狭義) 単調増加, (狭義) 単調減少** ((strictly) monotonically increasing, decreasing)**)．**
実数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が単調増加 (狭義単調増加) $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して，$a_n \leq a_{n+1}$ $(a_n < a_{n+1})$,
実数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が単調減少 (狭義単調減少) $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して，$a_n \geq a_{n+1}$ $(a_n > a_{n+1})$.

**定義 6．** 実数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が上に (下に) 有界 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists M \in \mathbb{R}$ s.t. $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して，$a_n \leq M$ $(a_n \geq M)$
$\iff$ 集合 $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ が上に (下に) 有界．

**定義 7 (数列 (sequence) の収束)．** 実数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $\alpha \in \mathbb{R}$ に**収束する (converge)** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall \varepsilon > 0$ に対して，$\exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して，$n \geq N \Longrightarrow |\alpha - a_n| < \varepsilon$. このとき $\alpha \in \mathbb{R}$ を実数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の**極限 (limit)** といい，$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$ とかく．数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が収束しないことを**発散**するという．

**定義 8．** 実数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $+\infty$ **に発散**する ($-\infty$ **に発散**する) $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall M \in \mathbb{R}$ に対して，$\exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して，$n \geq N \Longrightarrow a_n > M$ $(M < a_n)$. このとき，$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ $(-\infty)$ とかく．

**定理 ($\mathbf{W}^+$)．** 上に有界な部分集合 $A \subset \mathbb{R}$ $(A \neq \emptyset)$ には，上限 (最小上界) $\sup A \in \mathbb{R}$ が存在する．
**定理 ($\mathbf{W}^-$)．** 下に有界な部分集合 $A \subset \mathbb{R}$ $(A \neq \emptyset)$ には，下限 (最大下界) $\inf A \in \mathbb{R}$ が存在する．

**定理 ($\mathbf{M}^+$)．** 単調増加かつ上に有界な実数列は収束する．
**定理 ($\mathbf{M}^-$)．** 単調減少かつ下に有界な実数列は収束する．

**定理 (A) (アルキメデス (Archimedes) の原理)．** 正の実数 $a, b > 0$ に対して，$\exists n \in \mathbb{N}$ s.t. $na > b$.

**命題 9．** (A) $\iff$ $\mathbb{N}$ は上に有界でない $\iff \displaystyle\lim_{n\to\infty} n = +\infty \iff \lim_{n\to\infty} 1/n = 0 \iff \lim_{n\to\infty} 1/2^n = 0.$

**定理 10 ($\mathbb{Q}$ は $\mathbb{R}$ の中で稠密 (dense))．** $a, b \in \mathbb{R}$ に対して, $a < b \Longrightarrow \exists x \in \mathbb{Q}$ s.t. $a < x < b$.

**定理 (K) (区間縮小法)．** 閉区間の列 $I_n := [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}, (n \in \mathbb{N})$ に対して，(i)$\forall n \in \mathbb{N}$ に対して，$I_n \supset I_{n+1}$, (ii) $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0 \Longrightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{a\}$ かつ $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a \in \mathbb{R}$.

**定理 (B-W) (Bolzano-Weierstrass)．** 有界な実数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は収束する部分列を持つ．

**定義 11 (Cauchy 列, 基本列)．** 数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が**コーシー列 (基本列)** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall \varepsilon > 0$ に対して，$\exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall m, n \in \mathbb{N}$ に対して，$m, n \geq N \Longrightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon$. (定義から，収束する数列はコーシー列)

**定理 (C) (実数の完備性 (completeness))．** 実数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ がコーシー列であれば収束する．

**定義 12 (デデキントの切断 (Dedekind cut))．** 条件 (i) $A \cup B = \mathbb{R}$, (ii) $A \cap B = \emptyset$, (iii) $a \in A$ かつ $b \in B \Longrightarrow a < b$, を満たす空でない部分集合 $A, B \subset \mathbb{R}$ の組 $\langle A, B \rangle$ を $\mathbb{R}$ **の切断**という．

**定理 (D) (実数の連続性 (continium))．** $\mathbb{R}$ の切断 $\langle A, B \rangle$ に対して，次のいずれか一方が成り立つ：
(I) $A$ に最大元が存在し，$B$ には最小元がない, (II) $A$ には最大元がなく，$B$ には最小元が存在する．

**定理 13 (実数の公理，実数の連続性と同値な命題)．**
**(D) $\iff$ ($\mathbf{W}^+$) $\iff$ ($\mathbf{W}^-$) $\iff$ ($\mathbf{M}^+$) $\iff$ ($\mathbf{M}^-$) $\iff$ (K)&(A) $\iff$ (B-W) $\iff$ (C)&(A)**

通常 "**実数の公理**" として，定理 13 のうちの 1 つを認める．(しかしながら，これは証明を要することである (!!). 通常はデデキントの切断によって **(D)**，又は $\mathbb{Q}$ の**完備化**を行って **(C)&(A)** を示す．)