位相空間論A（第9回・2008/06/13）

これまで学んできたユークリッド空間 $(\mathbb{R}^n, d_2)$ における**以下の概念**は距離空間 (X,d) においても，ユークリッドの距離 d_2 の代わりに X の距離 d を用いて，全く同じように定義される．

> 開球，ε-近傍，開集合，閉集合，内点，外点，境界点，
> 内部，外部，境界，触点，集積点，孤立点，閉包，導集合

また，ユークリッド空間 $(\mathbb{R}^n, d_2)$ で成り立っていた定理・命題の多くは，上記概念の定義，集合論の命題，距離の公理 (D1), (D2), (D3) から証明されていたので，全く同じように証明ができる．但し，**実数の公理**は一般に距離空間では成り立たないことに注意する (第7回 [保存版] 参照).

距離空間 (X,d) における，**上述の概念**の定義とその性質 (命題，定理) をもう一度書いておく．($\leftarrow$ 各自，ユークリッド空間 $(\mathbb{R}^n, d_2)$ の場合を参考にして証明してみる!)

> 以下，(X,d) を距離空間とする．

部分集合 $A \subset X$ の (X における) **補集合 (complement)** を $A^c := X - A$ $(= X \backslash A)$ とかく．

定義 (開球，開球体，ε-近傍)． 点 $a \in X$ と正の実数 $r \in \mathbb{R}$ に対し，$B_d(a;r) := \{x \in X \mid d(x,a) < r\}$ を (距離 d に関する) **点 a を中心とする半径 r の開球 (開球体, open ball)** という．特に，$B_d(a;\varepsilon)$ を**点 a の ε-近傍 (ε-neighborhood)** と呼ぶ．距離 d を省略して，$B(a;\varepsilon) = B_d(a;\varepsilon)$ とも書く．

定義 (開集合, 閉集合)． 距離空間 (X,d) に対して，部分集合 $U \subset X$ が X の**開集合 (open set)** であるとは，$\forall x \in U$ に対して，$\exists \varepsilon > 0$ s.t. $B(x;\varepsilon) \subset U$ が成り立つことをいう．部分集合 $F \subset X$ は補集合 F^c が X の開集合であるとき，X の**閉集合 (closed set)** という．

命題 1． $\forall a \in X$ に対して，半径 r の開球体 $B(a;r)$ と $A = \{x \in X \mid d(a,x) > \varepsilon\}$ は X の開集合．また，半径 r の閉球体 $B^*(a;r) := \{x \in X \mid d(x,a) \leq r\}$ と $B = \{x \in X \mid d(a,x) \geq \varepsilon\}$ は X の閉集合．

> **定義 2 (X の開集合族 $\mathfrak{O}$，閉集合族 $\mathfrak{A}$)．** 距離空間 (X,d) に対して，
> X の全ての開集合からなる開集合族を $\mathfrak{O}_d(X)$ (または，略して $\mathfrak{O}_d$, $\mathfrak{O}$),
> X の全ての閉集合からなる閉集合族を $\mathfrak{A}_d(X)$ (または，略して $\mathfrak{A}_d$, $\mathfrak{A}$) と表す．

注意． $\mathfrak{O}$ はドイツ文字の O(大文字), $\mathfrak{A}$ はドイツ文字の A(大文字)．開集合 (open set)，閉集合 (closed set) はドイツ語では **o**ffene Menge, **a**bgeschlossene Menge という (Menge(集合) は女性名詞).

定理 3 (距離空間 (X,d) の開集合の基本性質)． 距離空間 (X,d) に対して，
($\mathrm{O_i}$) $X \in \mathfrak{O}_d(X)$, $\emptyset \in \mathfrak{O}_d(X)$,
($\mathrm{O_{ii}}$) $U_1, U_2, \ldots, U_k \in \mathfrak{O}_d(X) \Longrightarrow U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_k \in \mathfrak{O}_d(X)$,
($\mathrm{O_{iii}}$) $U_\lambda \in \mathfrak{O}_d(X)$, $\lambda \in \Lambda \Longrightarrow \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \in \mathfrak{O}_d(X)$.

定理 4 (距離空間 (X,d) の閉集合の基本性質)． 距離空間 (X,d) に対して，
($\mathrm{A_i}$) $X \in \mathfrak{A}_d(X)$, $\emptyset \in \mathfrak{A}_d(X)$,
($\mathrm{A_{ii}}$) $U_1, U_2, \ldots, U_k \in \mathfrak{A}_d(X) \Longrightarrow U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_k \in \mathfrak{A}_d(X)$,
($\mathrm{A_{iii}}$) $U_\lambda \in \mathfrak{A}_d(X)$, $\lambda \in \Lambda \Longrightarrow \bigcap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \in \mathfrak{A}_d(X)$.

定義 (内点，外点，境界点)． 距離空間 (X,d)，部分集合 $A \subset X$ に対して，
(1) 点 $x \in X$ が A の**内点 (interior point)** とは，$\exists \varepsilon > 0$ s.t. $B(x;\varepsilon) \subset A$ が成り立つこと．
(2) 点 $x \in X$ が A の**外点 (exterior point)** とは，$\exists \varepsilon > 0$ s.t. $B(x;\varepsilon) \subset A^c$ が成り立つこと．
(3) 点 $x \in X$ が A の内点でも外点でもない場合，A の**境界点 (boundary point)** という．
すなわち，$\forall \varepsilon > 0$ に対して，$B(x;\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ かつ $B(x;\varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset$ が成り立つこと．

定義 (A の内部，外部，境界)． 距離空間 (X,d)，部分集合 $A \subset X$ に対して
(1) A の内点全体の集合を A の**内部 (interior) (または開核)** といい，A^i (または A°) で表す，
(2) A の外点全体の集合を A の**外部 (exterior)** といい，A^e で表す，
(3) A の境界点全体の集合を A の**境界 (frontier, boundary)** といい，A^f (または A^b) で表す．

注意． (i) 定義から $X = A^i \cup A^e \cup A^f$ (直和), (ii) $x \in A^f$ は $x \in A$ も $x \notin A$ もどちらもある．

---

[1] 命題 1, 定理 3 を証明せよ．(ヒント $(\mathbb{R}^n, d_2)$ の場合と全く同じ．但し，もう図は通用しない (!))

[2] 定理 3 と (補集合に対する) ド・モルガンの法則を用いて，定理 4 を証明せよ．

定理 5 (開集合の特徴付け)． 距離空間 (X,d)，部分集合 $A\subset X$ に対して，
A が X の開集合 $\iff$ $A^i=A$ （A の点は全て A の内点）.

命題 6． 距離空間 (X,d)，部分集合 $A,B\subset X$ に対して，次が成り立つ：
(1) $A^i\in\mathfrak{O}_d$ である．さらに，$U\in\mathfrak{O}_d$ かつ $U\subset A\Longrightarrow U\subset A^i$ (A^i は A に含まれる最大の開集合),
(2) $A\subset B\Longrightarrow A^i\subset B^i$.

定理 7 (内部 (開核) の性質)． 距離空間 (X,d)，部分集合 $A,B\subset X$ に対して，次が成り立つ：
$(\mathrm{I_i})$ $X^i=X$,
$(\mathrm{I_{ii}})$ $A^i\subset A$,
$(\mathrm{I_{iii}})$ $(A\cap B)^i=A^i\cap B^i$,
$(\mathrm{I_{iv}})$ $(A^i)^i=A^i$.

例 8． (1) 部分集合 $A\subset X$ に対して，A の外部 $A^e=(A^c)^i$ は A^c に含まれる最大の開集合.
(2) A の境界 $A^f=(A^i\cup A^e)^c=(A^i)^c\cap(A^e)^c$ は X の閉集合である.

定義 (触点，集積点，孤立点 (adherent, accumulation, isolated point)**)．**
距離空間 (X,d)，部分集合 $A\subset X$ に対して，
(1) 点 $x\in X$ が A の**触点**とは，$\forall\varepsilon>0$ に対して，$B(x;\varepsilon)\cap A\neq\emptyset$ が成り立つこと.
(2) 点 $x\in X$ が A の**集積点**とは，$\forall\varepsilon>0$ に対して，$B(x;\varepsilon)\cap(A-\{x\})\neq\emptyset$ が成り立つこと.
(3) 点 $x\in X$ が A の**孤立点**とは，$\exists\varepsilon>0$ s.t. $B(x;\varepsilon)\cap A=\{x\}$ が成り立つこと.

定義 (A の閉包，導集合)． 距離空間 (X,d)，部分集合 $A\subset X$ に対して，
(1) A の触点全体の集合を A の**閉包 (closure)** といい，$\overline{A}$ (または A^a) で表す.
(2) A の集積点全体の集合を A の**導集合 (derived set)** といい，A^d で表す.

注意 9． (1) $\overline{A}=(A^e)^c=A^i\cup A^f$, (2) $A\subset\overline{A}$, (3) $A^d\subset\overline{A}$ である.

命題 (閉包の導集合による表現)． 部分集合 $A\subset X$ に対して，$\overline{A}=A\cup A^d$ が成り立つ.
また，$A^d\not\subset A$ ではあるが，$A-A^d=\{A$ の孤立点$\}$ より，$\overline{A}=A^d\cup\{A$ の孤立点$\}$ も成り立つ.

補題 10 (A^i と $\overline{A}$ の双対性 (duality))． 距離空間 (X,d)，部分集合 $A\subset X$ に対して，
$(\overline{A})^c=(A^c)^i$ が成り立つ．これより，特に $\overline{A}=((A^c)^i)^c$, $\overline{A^c}=(A^i)^c$, $A^i=(\overline{A^c})^c$ が成り立つ.

注意． 閉包を $\overline{A}=A^a$ と書けば，$A^a=A^{cic}$, $A^i=A^{cac}$ となり覚えやすい．但し，$A^{cic}=(((A^c)^i)^c$.

命題 11． 距離空間 (X,d)，部分集合 $A,B\subset X$ に対して，次が成り立つ：
(1) $\overline{A}\in\mathfrak{A}_d$ である．さらに，$F\in\mathfrak{A}_d$ かつ $A\subset F\Longrightarrow\overline{A}\subset F$ ($\overline{A}$ は A を含む最小の閉集合),
(2) $A\subset B\Longrightarrow\overline{A}\subset\overline{B}$.

定理 12 (閉集合の特徴付け)． 距離空間 (X,d)，部分集合 $A\subset X$ に対して，
A が X の閉集合 $\iff$ $A=\overline{A}$ （$\iff$ $A^f\subset A$ [A は A の境界を含む]) $\iff$ $A^d\subset A$.

定理 13 (閉包の性質)． 距離空間 (X,d)，部分集合 $A,B\subset X$ に対して，次が成り立つ：
$(\mathrm{K_i})$ $\overline{\emptyset}=\emptyset$,
$(\mathrm{K_{ii}})$ $A\subset\overline{A}$,
$(\mathrm{K_{iii}})$ $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$,
$(\mathrm{K_{iv}})$ $\overline{\overline{A}}=\overline{A}$.

命題． 部分集合 $A,B\subset X$ に対して, (1) $A\subset B\Longrightarrow A^d\subset B^d$, (2) $(A\cup B)^d=A^d\cup B^d$.

注意 14． 定理 7 $(\mathrm{I_{iii}})$ と定理 13 $(\mathrm{K_{iii}})$ は $\cap$ と $\cup$ を取り替えると，一般には成り立たない.
(ヒント　例えば $(\mathbb{R},d_2)$ において，それぞれ $A=[-1,0]$, $B=[0,1]$ と $A=(-1,0)$, $B=(0,1)$ など)

---

[3] 距離空間 (X,d) において，開球，ε-近傍，開集合，閉集合，内点，外点，境界点，内部，外部，境界，触点，集積点，孤立点，閉包，導集合とはそれぞれ何か？(定義を書く).

[4] このページにある，命題・定理をそれぞれ証明せよ．また，例 8, 注意 9, 注意 14 を実際に示せ.

[5] $(\mathbb{R},d_2)$ において，$A=\{1/n\,|\,n\in\mathbb{N}\}$ に対して，A^i, A^e, A^f, $\overline{A}$, A^d, $\{A$ の孤立点$\}$ を求めよ.

[6] 距離空間 (X,d)，部分集合 $A\subset X$ に対して，次を示せ：(ヒント　背理法)
$x\in X$ が A の集積点 $\Longrightarrow\forall\varepsilon>0$ に対して，$B(x;\varepsilon)$ は A の点を無数に含む.

[7] 定理 5, 命題 6, 定理 7 に補題 10 を適用することで，定理 12, 命題 11, 定理 13 をそれぞれ導け.

微分積分学で学んだ実数の集合 $\mathbb{R} = (\mathbb{R}, d_2)$ に対する以下の概念を，距離空間 (X, d) に対しても，ユークリッドの距離 d_2 の代わりに X の距離 d を用いて，全く同じように定義する．

実数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to$ 点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ とその収束，有界，コーシー列 (基本列)，連続関数 (連続写像)

定義 (A の点列)． 距離空間 (X, d)，部分集合 $A \subset X$ に対して，写像 $x : \mathbb{N} \to A$ を A **の点列**という．通常，像 $x(n)$ を x_n とかいて，点列を $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ と表す．点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ において，自然数の列 $i_1 < i_2 < \cdots$ に対する数列 $\{x_{i_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ を**点列** $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **の部分列**という．$\mathbb{R}$ の点列を**実数列**といった．

定義 (点列の収束)． $A \subset X$ の点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $\alpha \in X$ に**収束する (converge)**
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall\varepsilon > 0$ に対して，$\exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して，$n \geq N \Longrightarrow d(x_n, \alpha) < \varepsilon$
$\Longleftrightarrow$ $\forall\varepsilon > 0$ に対して，$\exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して，$n \geq N \Longrightarrow x_n \in B(\alpha; \varepsilon)$.
このとき $\alpha \in \mathbb{R}$ を点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の**極限 (limit)** といい，$\alpha = \lim_{n\to\infty} x_n$ とかく．

補題 15． 距離空間 (X, d) の点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $\alpha \in X$ に収束 $\Longleftrightarrow$ 実数列 $\{d(x_n, \alpha)\}_{n\in\mathbb{N}}$ が 0 に収束．

定義． $A \subset X$ の収束点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対して，$\#\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \infty$ のとき**無限型**，$\#\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} < \infty$ のとき**一点くり返し型**という．

定理 16 (集積点の点列的表現)． 距離空間 (X, d)，部分集合 $A \subset X$ に対して，
点 x が A の集積点 $\Longleftrightarrow$ (i) $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset A - \{x\}$, (ii) $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ を満たす $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が存在
$\Longleftrightarrow$ 点 x は A のある無限型収束点列の極限．

定理 17 (閉集合の点列的表現)． 距離空間 (X, d)，部分集合 $F \subset X$ に対して，
$F \subset X$ が閉集合 $\Longleftrightarrow$ F の点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が x に収束すれば $x \in F$.

定理 18 (触点の点列的表現)． 距離空間 (X, d)，部分集合 $A \subset X$ に対して，
$x \in \overline{A}$ $\Longleftrightarrow$ x に収束する A の点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が存在．

定義 (A の直径 (diameter), A と B の間の距離)． 距離空間 (X, d)，部分集合 $A, B \subset X$ $(A, B \neq \emptyset)$ に対して，$\delta(A) := \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\}$ を A **の直径**という．
また，$d(A, B) := \inf\{d(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$ を A **と** B **の間の距離**という．

定義 (有界 (bounded))． 距離空間 (X, d)，部分集合 $A \subset X$ に対して，A が有界 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\delta(A) < \infty$.
また，点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が有界 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 集合 $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ が有界．

命題． 部分集合 $A \subset X$ に対して，A が有界 $\Longleftrightarrow$ $\forall x \in X$ に対して, $\exists\varepsilon > 0$ s.t. $A \subset B(x; \varepsilon)$,
点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が有界 $\Longleftrightarrow$ $\forall x \in X$ に対して, $\exists M > 0$ s.t. $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して，$x_n \in B(x; M)$.

定義 (Cauchy 列，基本列)． A の点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が**コーシー列 (基本列)** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall\varepsilon > 0$ に対して，$\exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall m, n \in \mathbb{N}$ に対して，$m, n \geq N \Longrightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon$. (定義から，収束列はコーシー列)

注意． 一般に，距離空間ではコーシー列は収束しない ($\leftarrow$ 例えば，$A = (\mathbb{Q}, d_2)$ や $A = (0, 1) \subset \mathbb{R}$).

定義 (完備)． 距離空間 (X, d) において，任意のコーシー列が収束するとき X は**完備**であるという．

定理 (C) (実数の完備性 (completeness))． $(\mathbb{R}, d_2)$ は完備である．　　(→ 第 7 回 [保存版] 参照)

ユークリッド空間 $(\mathbb{R}^n, d_2)$ では，次の定理が成り立つ．

定理 19． ユークリッド空間 $(\mathbb{R}^n, d_2)$ と，部分集合 $X \subset \mathbb{R}^n$ の点列 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ に対して，各 x_i を $\mathbb{R}^n$ の座標を用いて $x_i = (x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \ldots, x_i^{(n)}) \in X$ とする．このとき，次は同値である：
(i) 点列 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ は点 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ に収束する；
(ii) 各 $k = 1, 2, \ldots, n$ に対して，実数列 $\{x_i^{(k)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ は $\alpha_k \in \mathbb{R}$ に収束する．

定理 19 を用いて，$\mathbb{R}$ の場合と同様，$\mathbb{R}^n$ に対して以下が示せる．($\leftarrow$ 各自 (!) レポート自由提出)

定理 20 (テスト範囲外)**．** $A \subset \mathbb{R}^n$ の点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対して，
(1) 点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $\alpha \in \mathbb{R}^n$ に収束 $\Longrightarrow$ $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の任意の部分列 $\{x_{i_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ も α に収束．
(2) 点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が収束 $\Longrightarrow$ 点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ はコーシー列 $\Longrightarrow$ 点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は有界．
(3) 点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ がコーシー列かつ部分列 $\{x_{i_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $\alpha \in \mathbb{R}^n$ に収束 $\Longrightarrow$ 点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は α に収束．

実数 $\mathbb{R}$ の完備性と定理 19 を使うことによって，以下が得られる．

定理 21 ($\mathbb{R}^n$ の完備性)． ユークリッド空間 $(\mathbb{R}^n, d_2)$ は完備である．

ユークリッド空間 $(\mathbb{R}^n, d_2)$ は集合としては $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ のように，より小さい空間の直積である．定理19を一般化するために，ここでは逆に2つの距離空間 (X, d_X), (Y, d_Y) からその直積集合 $X \times Y$ に対して距離を入れることを考える．

定義22 (直積距離空間)． n 個の距離空間 $(X_1, d_1), \dots, (X_n, d_n)$ に対して，直積集合 $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ の2点 $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ の間の距離を

$$d^{\times}(x, y) := \sqrt{d_1(x_1, y_1)^2 + \cdots + d_n(x_n, y_n)^2}$$

によって定義すれば，$(X, d^{\times})$ は距離空間となる **(問** [8]**)**．こうして作られた距離空間 $(X, d^{\times})$ を距離空間 $(X_1, d_1), \dots, (X_n, d_n)$ の**直積距離空間**といい，$(X, d^{\times}) = (X_1, d_1) \times \cdots \times (X_n, d_n)$ と表す．

例23． $(\mathbb{R}^n, d_2)$ は (n 個の) 直積距離空間 $(\mathbb{R}^1, d_2) \times \cdots \times (\mathbb{R}^1, d_2)$ である **(問 [9])**．

定理24． 直積距離空間 $(X, d^{\times}) = (X_1, d_1) \times \cdots \times (X_n, d_n)$ の点列 $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ に対して，各 x_i を $x_i = (x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \dots, x_i^{(n)}) \in X$ とする．このとき，次は同値である：
(i) 点列 $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ は点 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in X$ に収束する；
(ii) 各 $k = 1, 2, \dots, n$ に対して，実数列 $\{x_i^{(k)}\}_{i \in \mathbb{N}}$ は $\alpha_k \in X_k$ に収束する．

定理25 (完備距離空間の直積は完備)．
完備な距離空間 $(X_1, d_1), \dots, (X_n, d_n)$ の直積距離空間 $(X_1, d_1) \times \cdots \times (X_n, d_n)$ は完備である．

系26． ユークリッド空間 $(\mathbb{R}^n, d_2)$ は完備である．

定義27 (連続写像 (continuous map))． 距離空間 (X, d)，(X', d') に対して，
写像 $f : X \to X'$ が**点 $a \in X$ で連続**
$\overset{\text{def}}{\iff}$ $\forall \varepsilon > 0$ に対して，$\exists \delta > 0$ s.t. $\forall x \in X$ に対して，$d(x, a) < \delta \Longrightarrow d'(f(x), f(a)) < \varepsilon$
$\iff$ $\forall \varepsilon > 0$ に対して，$\exists \delta > 0$ s.t. $f(B_d(a; \delta)) \subset B_{d'}(f(a); \varepsilon)$.
写像 $f : X \to X'$ が $\forall a \in X$ で連続であるとき，f は (X, d) 上で連続である，または (X, d) 上の**連続写像**という．特に，$X' = \mathbb{R}$ のとき f を **X 上の (実数値) 連続関数**という．

定理28 (開集合，閉集合による連続写像の特徴付け)．
距離空間 (X, d)，(X', d')，写像 $f : X \to X'$ に対して次の3つの条件 (i),(ii),(iii) は同値である：
(i) f は X 上の連続写像，
(ii) X' の任意の開集合 U に対して，f による U の逆像 $f^{-1}(U)$ は X の開集合である;

$$\forall U \in \mathfrak{O}_{d'}(X') \text{ に対して，} f^{-1}(U) \in \mathfrak{O}_d(X),$$

(iii) X' の任意の閉集合 F に対して，f による F の逆像 $f^{-1}(F)$ は X の閉集合である;

$$\forall F \in \mathfrak{A}_{d'}(X') \text{ に対して，} f^{-1}(F) \in \mathfrak{A}_d(X).$$

---

[8] (定義22) $(X, d^{\times})$ が距離空間であることを示せ．

[9] 例23を確かめよ．

[10] 距離空間 (X, d_X), (Y, d_Y), (Z, d_Z) に対して，写像 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ が連続ならば，
合成写像 $g \circ f : X \to Z$ も連続であることを示せ．

[11] 距離空間 (X, d) に対して, 写像 $f : X \to \mathbb{R}^n$, $g : X \to \mathbb{R}^n$ が連続ならば,
次の写像も連続であることを示せ：
(1) $f + g : X \to \mathbb{R}^n$, $\quad (f + g)(x) = f(x) + g(x)$,
(2) $cf : X \to \mathbb{R}^n$, $\quad (cf)(x) = cf(x)$,
(3) $f \cdot g : X \to \mathbb{R}^n$, $\quad (f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$.

---

[12] $(\mathbb{R}^2, d_2)$ の点列 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を $x_n = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \cos \frac{n\pi}{8}, \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{n\pi}{8}\right)$ によって定める．
(1) 点列 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の第16項までを図示せよ，
(2) 点列 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は原点 $(0, 0)$ に収束することを示せ．
また，$\varepsilon = 1/1000$ のとき，収束の定義の N はどの位大きくとる必要があるか？

[13] $\mathbb{R}^2$ の点列 $\{(1/n, 1/n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ は $(\mathbb{R}^2, d_2)$, $(\mathbb{R}^2, d_1)$, $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$, $(\mathbb{R}^2, d_0)$ で収束するか？
もし収束しているときは，その収束先は？

[14] $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ に対して，$\mathbb{Q}^i$, $\mathbb{Q}^e$, $\mathbb{Q}^f$ を求めよ．