

3 文字の置換 . 1, 2, 3 の 3 つの文字の並べ替えてみると ,

$$1\ 2\ 3, \quad 1\ 3\ 2, \quad 2\ 1\ 3, \quad 2\ 3\ 1, \quad 3\ 1\ 2, \quad 3\ 2\ 1$$

の 6 通りの順列ができる . (← 何も並べ替えないものも考える)

この並べ替えを , それぞれ

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

と書いて , 3 文字の置換 (permutation) と言う . 例えば ,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

とは , $1 \mapsto 3, 2 \mapsto 2, 3 \mapsto 1$ なる並べ替え (=置換) を表す .

定義 (n 次対称群 S_n) . 一般に , n 文字 $\{1, 2, \dots, n\}$ の置換全体の集合を S_n と書く . すなわち

$$S_n := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \mid \{i_1, i_2, \dots, i_n\} \text{ は } \{1, 2, \dots, n\} \text{ の並べ替え} \right\}$$

である . この n 文字の置換全体の集合 S_n を n 次対称群 (symmetric group of degree n) と言う .

n 次対称群 S_n は , 非常に重要な概念である群の例になっているので , この様な名前と呼ばれる . 一般に , 群とは何か (群の定義) については第 7 回の講義で勉強し , さらに来年度 (2 年生) の代数 1 では 1 年間を通して , 群の理論 (=群論) を学ぶ .

命題 . n 次対称群 S_n は $n!$ 個の元からなる , すなわち集合 S_n の位数は $n!$ である . (← $\#S_n = n!$).

例 . $\#S_2 = 2, \#S_3 = 6, \#S_4 = 24, \#S_5 = 120, \#S_6 = 720, \#S_7 = 5040, \#S_8 = 40320$ など .

定義 (置換の合成 (積)) . 2 つの置換 $\sigma, \tau \in S_n$ に対して , 新たな置換 $\sigma \circ \tau$ を

$$(\sigma \circ \tau)(i) := \sigma(\tau(i)), \quad (i = 1, \dots, n)$$

を満たす置換として定義し , 置換 $\sigma \circ \tau$ を置換 σ と置換 τ の合成 (または積) という .

置換の合成 (積) の例 . 2 つの置換

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

に対して , 置換の合成 (積) $\sigma \circ \tau$ とは置換

$$\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

のことであり , 置換の合成 (積) $\tau \circ \sigma$ とは置換

$$\tau \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

のことである (← 積は右から計算する!).

特に , $\sigma \circ \tau \neq \tau \circ \sigma$ に注意する (← このことを , σ と τ は非可換ともいう) .

定義 (巡回置換) . 置換 $\sigma \in S_n$ が, 列を適当に入れ替えて ($\leftarrow$ 「適当に」の意味については教科書 p.34 を見ること)

$$\sigma = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_{r-1} & i_r & i_{r+1} & i_{r+2} & \cdots & i_n \\ i_2 & i_3 & \cdots & i_r & i_1 & i_{r+1} & i_{r+2} & \cdots & i_n \end{pmatrix} \in S_n$$

となるとき, すなわち 置換 $i_1 \mapsto i_2 \mapsto i_3 \mapsto \cdots \mapsto i_r \mapsto i_1$ を引き起こすとき, 置換によって動かない $i_{r+1}, \dots, i_n$ は省略して, 単に

$$\sigma = (i_1 i_2 \cdots i_{r-1} i_r)$$

と表し, 長さ r の巡回置換 (cycle) と呼ぶ. 但し, σ が何も動かさない置換のとき, すなわち

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

の場合には, $\sigma = (1)$ と書くことにする (動かないものを全て省略すると, 何もなくなる為).

巡回置換の例 . 置換

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \in S_5$$

は置換 $2 \mapsto 4 \mapsto 3 \mapsto 2$ を表しているので,

$$\sigma = (243)$$

と書き, σ は長さ 3 の巡回置換である.

命題 (サイクル分解) . 任意の置換 $\sigma \in S_n$ は互いに共通の数字を含まないいくつかの巡回置換の積で書ける. この表示を σ のサイクル分解 (cycle decomposition) とよぶ.

命題 . 2 つの巡回置換 σ, τ は互いに共通の数字を含まないならば $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$. ($\leftarrow$ 可換という).

例 (サイクル分解) . 8 文字の置換

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 8 & 7 & 2 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \in S_8$$

のサイクル分解は $\sigma = (25) \circ (386) \circ (147)$ で与えられ, $\sigma = (147) \circ (386) \circ (25)$ でもある.

定義 (互換, 隣接互換) . 長さ 2 の巡回置換 $(i j)$ を互換 (transposition) という. 互換の中でも特に, 隣り合った数字からなる互換 $(i \ i+1)$ のことを隣接互換 (elementary transposition) という.

互換と隣接互換の例 . (i) 次の置換は $3 \leftrightarrow 4$ を表しており, 隣接互換である:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (34) \in S_5$$

(ii) 置換 $(13) \in S_3$ は $1 \leftrightarrow 3$ を表しており, 互換ではあるが隣接互換ではない.

(iii) 置換

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \in S_5$$

は互換ではないが, サイクル分解は隣接互換の積 $\sigma = (12) \circ (45)$ である.

演習問題 (小テストの予想問題)

[1] 置換

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

に対して, 次の積を計算せよ. 但し, 答えは $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \boxed{} \end{pmatrix}$ の形で書くこと.

(i) $\sigma \circ \tau$ (ii) $\tau \circ \rho$ (iii) $\sigma \circ \rho$ (iv) $(\sigma \circ \tau) \circ \rho$ (v) $\sigma \circ (\tau \circ \rho)$

[2] 次の置換のサイクル分解 (= 共通の数字を含まない巡回置換の積) を求めよ.

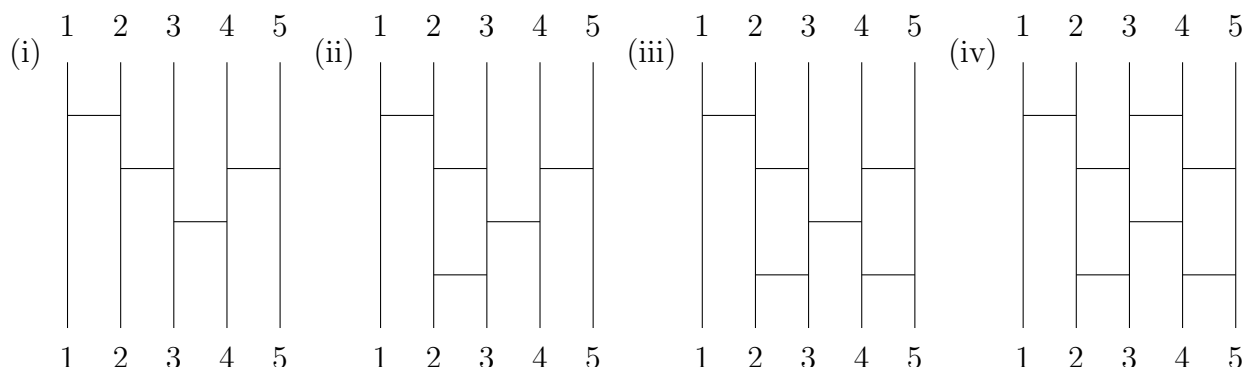
(i) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ (iii) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ (iv) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

[3] 次の積を計算せよ. 但し, 答えは巡回置換 $(1 \boxed{})$ の形で書くこと.

(i) $(12) \circ (23)$ (ii) $(12) \circ (234)$ (iii) $(123) \circ (345)$ (iv) $(12345) \circ (13425)$

[4] (前問の (i), (ii), (iii) の様に) 巡回置換 $(12 \cdots n)$ はどこで切っても巡回置換の積 $(12 \cdots r-1 r) \circ (r \ r+1 \cdots n-1 \ n)$ と等しくなるか?[5] 縦の棒が n 本のあみだくじに, 左から順に番号 $1, \dots, n$ を付ける. このあみだくじによって $\{1, \dots, n\}$ の置換 $\sigma \in S_n$ が 1 つ定まる. 次のあみだくじに対応する $\sigma \in S_5$ の元は何か?

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \boxed{} \end{pmatrix} \in S_5$ の形とそのサイクル分解を共に答えること.

[6] 問 逆に, 任意の置換 $\sigma \in S_n$ に対し, σ に対応するあみだくじは必ず存在するだろうか?

次の (i) ~ (ii) を解きながら, 問の答えを考えてみよう. また, 存在する場合にはどのように作ったらよいだろうか. (ヒント それぞれ 1 つ前の問を参考にしながら考えてみる)

(i)-1 巡回置換 (12345) に対応するあみだくじを横棒 4 本だけを使って作れ.

(ヒント 分からない場合には, $(12), (123), (1234)$ と順に考えてみる)

(i)-2 巡回置換 (12345) を 4 つ隣接互換の積で書け.

(ヒント 分からない場合には, $[4]$ を繰り返し使ってもよい)

(i)-3 長さ r の巡回置換 $(j_1 j_2 \cdots j_r)$ は $r-1$ 個の互換の積で表せる事を示せ (具体的に書く).

(i)-4 一般に, 置換 $\sigma \in S_n$ はいくつかの互換の積で表せる事を説明せよ.

(ii)-1 互換 (15) に対応するあみだくじを横棒を 7 本で 4 種類以上書け.

(ヒント 分からない場合にはまず, $(12), (13), (14)$ と徐々に数字を離してみる)

(ii)-2 互換 (15) を 7 つ隣接互換の積として $(12) \circ \boxed{} \circ (12)$ の形で表せ.

(ii)-3 一般に, 任意の互換 (ij) は隣接互換の積で表される事を, 実際に書いて示せ.

(iii) 問の答えを書き, なぜかを (分かりやすく) 説明せよ.

(iv) 上記 (i)-(iii) を参考にして, 次の置換に対応するあみだくじを実際書け. 但し, 取り除ける横棒 (連続した横棒 $\equiv$ など) は取り除いて, 出来る限り横棒の数を少なくすること.

(iv)-1 (12354) (iv)-2 (13245) (iv)-3 (15342)

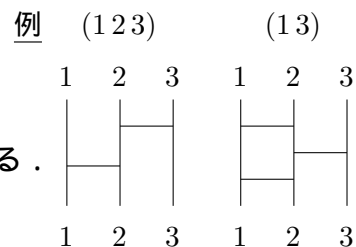
あみだくじの原理 任意の置換 $\sigma \in S_n$ に対し, σ に対応するあみだくじが存在する.

あみだくじの原理は次の (I),(II),(III) から従う.

(I) 任意の置換 $\sigma \in S_n$ は互いに共通の数字を含まない, 幾つかの巡回置換の積で書ける (=サイクル分解).

(II) 長さ r の巡回置換 $(j_1 j_2 \cdots j_r)$ は $r-1$ 個の互換の積で書ける.

(III) 任意の互換 $(i j)$ は隣接互換の積で書ける.



特に, (II) 及び (III) は次の命題から従い, あみだくじを具体的に作る事が可能である.

命題 (大根切りの法則) . 長さ r の巡回置換 $\sigma = (j_1 j_2 \cdots j_r)$ は $r-1$ 個の互換の積によって

$$\sigma = (j_1 j_2) \circ (j_2 j_3) \circ \cdots \circ (j_{r-2} j_{r-1}) \circ (j_{r-1} j_r)$$

と書ける.

命題 (回文の法則) . 任意の互換 $\sigma = (i j)$, $i < j$ は隣接互換の積によって (回文のようにして)

$$\sigma = (i i+1) \circ (i+1 i+2) \circ \cdots \circ (j-2 j-1) \circ (j-1 j) \circ (j-2 j-1) \circ \cdots \circ (i+1 i+2) \circ (i i+1)$$

と表せる. 特に, $k := j-i$ とすれば σ は $2k-1$ 個の隣接互換の積である.

注意 . 「大根切りの法則」と「回文の法則」は私が (この授業で覚えやすいように) 勝手につけた名前なので, この授業以外では決して使ってはいけない. 特に, どの数学者にも通用しない.

レポート課題 (提出期限 5 月 7 日)

[1] (全員提出) 課題名「教科書の前半部分の感想」

教科書の 77 ページまでを最低 3 回以上読み, 感想を提出する. その際, 自分が納得できたことあるいは理解できた部分を 5 つ以上挙げて, 具体例とともに記号やその使い方について説明を加えること (どの部分についてなのかとページ数を明らかにすること).

[2] (自由提出) 課題名「フェルマーの最終定理について調べたこと」

フェルマーの最終定理について調べ, レポートとしてまとめて提出する. また, 自分なりの考察を加えて提出することがのぞましい. 例えば, 「 $n \geq 3$ 以上の整数に対して $x^n + y^n = z^n$ を満たす自然数の組 (x, y, z) が存在しないことを示すには, n が 4 のとき及び n が奇素数の場合のみを示せば十分である (教科書 p.48 参照)」「 $n = 3$ のとき, $x^3 + y^3 = z^3$ をみたす自然数の組 (x, y, z) は存在しないことを示す」など.

[3] (自由提出) 課題名「ピタゴラスの定理についての考察」

$x^2 + y^2 = z^2$ を満たす自然数 (x, y, z) は無限にあり, またどのようにしたら全て得られるかをレポートとしてまとめて提出する.

レポート提出に関する注意事項

- (1) A4 用紙に表紙を付け, 表紙には課題名・氏名・学籍番号・課題提出日・課題期限日を明記すること. (学部のレポート用表紙を用いてもよい)
- (2) レポートは自分のノートとは違い, 他人が読む事を前提にして書かなければならない.
- (3) 論点を明確にし, できる限り完結にかくこと. (文章能力も問われる)
- (4) 字が極端に汚い, または明らかに他人のレポートを写しただけのものは採点しない.
- (5) 調べた本, Web サイトは必ず明記すること (Web の情報は間違っている事が多々あるので十分に注意を払うこと). Web ですぐに調べられることのみを写したレポートは採点しない.
- (6) 一緒に課題に取り組んだ人がいる場合には, 協力者の氏名を表紙に明記すること.
- (7) 提出場所は, 5/7 の授業の開始前に教卓へ直接提出とする. (4/23 でも可)