代数序論A（第5回・2009/05/14）

演習問題の解答

[2] (p.11)

(i) $S_2 = \{(1), a\}$, $a = (1\ 2)$,
(ii) $S_3 = \{(1), a, b, c, d, e\}$, $a = (1\ 2\ 3)$, $b = (1\ 3\ 2)$, $c = (1\ 2)$, $d = (1\ 3)$, $e = (2\ 3)$,
(iii) $X_3 = \{(1), a, b\}$, $a = (1\ 2\ 3)$, $b = (1\ 3\ 2)$,
(iv) $X_4 = \{(1), a, b\}$, $a = (1\ 4\ 3)$, $b = (1\ 3\ 4)$,
(v) $X_5 = \{(1), a, b, c\}$, $a = (1\ 2\ 3\ 4)$, $b = (1\ 3)(2\ 4)$, $c = (1\ 4\ 3\ 2)$,
(vi) $X_6 = \{(1), a, b, c\}$, $a = (1\ 2)(3\ 4)$, $b = (1\ 3)(2\ 4)$, $c = (1\ 4)(2\ 3)$,
(vii) $X_7 = \{(1), a, b, c\}$, $a = (1\ 5\ 2\ 3)$, $b = (1\ 2)(5\ 3)$, $c = (1\ 3\ 2\ 5)$,
(viii) $X_8 = \{(1), a, b, c\}$, $a = (1\ 2)$, $b = (3\ 4)$, $c = (1\ 2)(3\ 4)$,
(ix) $X_9 = \{(1), a, b, c, d\}$, $a = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$, $b = (1\ 3\ 5\ 2\ 4)$, $c = (1\ 4\ 2\ 5\ 3)$, $d = (1\ 5\ 4\ 3\ 2)$.

(i) S_2

$\circ$	(1)	a
(1)	(1)	a
a	a	(1)

(ii) S_3

$\circ$	(1)	a	b	c	d	e
(1)	(1)	a	b	c	d	e
a	a	b	(1)	d	e	c
b	b	(1)	a	e	c	d
c	c	e	d	(1)	b	a
d	d	c	e	a	(1)	b
e	e	d	c	b	a	(1)

(iii) X_3, (iv) X_4

$\circ$	(1)	a	b
(1)	(1)	a	b
a	a	b	(1)
b	b	(1)	a

(v) X_5, (vii) X_7

$\circ$	(1)	a	b	c
(1)	(1)	a	b	c
a	a	b	c	(1)
b	b	c	(1)	a
c	c	(1)	a	b

(vi) X_6, (viii) X_8

$\circ$	(1)	a	b	c
(1)	(1)	a	b	c
a	a	(1)	c	b
b	b	c	(1)	a
c	c	b	a	(1)

(ix) X_9

$\circ$	(1)	a	b	c	d
(1)	(1)	a	b	c	d
a	a	b	c	d	(1)
b	b	c	d	(1)	a
c	c	d	(1)	a	b
d	d	(1)	a	b	c

[3] (p.11)

(i) $Y_1 = \{1, a\}$, $a = -1$,
(ii) $Y_2 = \{1, a, b\}$, $a = (-1 + \sqrt{-3})/2$, $b = (-1 - \sqrt{-3})/2$,
(iii) $Y_3 = \{1, a, b, c\}$, $a = \sqrt{-1}$, $b = -1$, $c = -\sqrt{-1}$.

(i) Y_1

$\cdot$	1	a
1	1	a
a	a	1

(ii) Y_2

$\cdot$	1	a	b
1	1	a	b
a	a	b	1
b	b	1	a

(iii) Y_3

$\cdot$	1	a	b	c
1	1	a	b	c
a	a	b	c	1
b	b	c	1	a
c	c	1	a	b

定義 (フィボナッチ数列). $F_1 = 1,\ F_2 = 1,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\ (n \geq 3)$ で定まる数列 $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を**フィボナッチ (Fibonacci) 数列**という．各項 F_n は n 番目の**フィボナッチ数**といわれる．

例. $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の最初の 20 項を書いてみる：

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, \ldots$$

定義 (黄金比). $x^2 = x + 1$ を満たす実数は

$$\alpha := \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \beta := \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

であり，特に，比 $1 : \alpha = 1.61803\cdots$ は**黄金比** (golden ratio) と呼ばれている．

定理 (ビネの公式). フィボナッチ数列 $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の第 n 項は以下で与えられる：

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}.$$

定理 (フィボナッチ数の比の収束). フィボナッチ数列 $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対して，

$$\lim_{n\mapsto\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

定義 (階乗). 0 以上の整数 $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して，n の**階乗** (factorial) $n!$ を

$$\begin{cases} 0! := 1, \\ n! := n(n-1)\cdots 2 \cdot 1, \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

と定義する．

定義 (二項係数). $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ と $0 \leq k \leq n$ に対して，

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

を**二項係数** (binomial coefficient) とよぶ．

命題. $n \in \mathbb{N}$ と $1 \leq k \leq n$ に対して，以下が成り立つ：

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

定理 (二項定理). $n \in \mathbb{N}$ に対して，以下が成り立つ：

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

例.

$$\text{(i)} \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n, \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

定理 (リュカ, 1876). $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ をフィボナッチ数列，$[x]$ を $x \in \mathbb{R}$ のガウス記号とする．このとき，以下が成り立つ：

$$F_n = \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \cdots + \binom{[n/2]}{[(n-1)/2]}.$$

法 (modulo) m の世界

定義 (法 m に関して合同)． 整数 $a, b \in \mathbb{Z}$ が法 m に関して合同 (congruent) であるとは，$a-b$ が m で割り切れることと定義し，$a \equiv b \pmod{m}$ とかく．

m を法としたフィボナッチ数列．

例．

$$
\begin{aligned}
\{F_n \pmod{2}\}_{n\in\mathbb{N}} &: \mathbf{1,1,0},1,1,0,1,1,0,1,1,0,\ldots \\
\{F_n \pmod{3}\}_{n\in\mathbb{N}} &: \mathbf{1,1,2,0,2,2,1,0},1,1,2,0,2,2,1,0,\ldots \\
\{F_n \pmod{4}\}_{n\in\mathbb{N}} &: \mathbf{1,1,2,3,1,0},1,1,2,3,1,0,1,1,2,3,1,0,\ldots \\
\{F_n \pmod{5}\}_{n\in\mathbb{N}} &: \mathbf{1,1,2,3,0,3,3,1,4,0,4,4,3,2,0,2,2,4,1,0},1,1,2,\ldots \\
\{F_n \pmod{6}\}_{n\in\mathbb{N}} &: \mathbf{1,1,2,3,5,2,1,3,4,1,5,0,5,5,4,3,1,4,5,3,2,5,1,0},1,1,2,3,\ldots
\end{aligned}
$$

定理 (フィボナッチ数列の周期性)． m を法としたフィボナッチ数列 $\{F_n \pmod{m}\}_{n\in\mathbb{N}}$ は周期性をもつ．すなわち，ある自然数 $N \in \mathbb{N}$ が存在して，以下が成り立つ：

$$F_{n+N} \equiv F_n \pmod{m}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

m を法としたパスカルの三角形．

$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$
1	1	1	1
1 1	1 1	1 1	1 1
1 0 1	1 2 1	1 2 1	1 2 1
1 1 1 1	1 0 0 1	1 3 3 1	1 3 3 1
1 0 0 0 1	1 1 0 1 1	1 0 2 0 1	1 4 1 4 1
1 1 0 0 1 1	1 2 1 1 2 1	1 1 2 2 1 1	1 0 0 0 0 1
1 0 1 0 1 0 1	1 0 0 2 0 0 1	1 2 3 0 3 2 1	1 1 0 0 0 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1	1 1 0 2 2 0 1 1	1 3 1 3 3 1 3 1	1 2 1 0 0 1 2 1

レポート課題 (提出期限5月21日)

注　提出にあたっては「レポート提出に関する注意事項 (p.6)」(1)-(6) を参照のこと．

[1] (自由提出) 課題名「2を法としたパスカルの三角形」
2を法としたパスカルの三角形に対して，第 k 行 $(k = 0, 1, \ldots)$ の1の数を与える公式を予想し，それが正しいことを証明する．3を法とした場合にも何らかの予想ができれば，なお望ましい．

参考文献

[1] はじめての数論―発見と証明の大航海 ピタゴラスの定理から楕円曲線まで, ジョセフ・H. シルヴァーマン (著), 鈴木 治郎 (翻訳), ピアソンエデュケーション (2001).

[2] A Friendly Introduction To Number Theory (洋書), Joseph H. Silverman (著), Prentice Hall College Div; 3版 (2005).

[3] フィボナッチ数の小宇宙―フィボナッチ数、リュカ数、黄金分割, 中村 滋 (著), 日本評論社; 改訂版版 (2008).