定義 (群). 空でない集合 G 上に二項演算

$$f : G \times G \longrightarrow G, \quad (a,b) \longmapsto a \circ b := f(a,b)$$

が定義され，次の3つの条件 (G1), (G2), (G3) を満たすとき $(G, \circ)$ を**群** (group) という：

(G1) **結合法則**　任意の $a, b, c \in G$ に対して，$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$,
(G2) **単位元の存在**　ある $e \in G$ が存在して，任意の $a \in G$ に対して $a \circ e = e \circ a = a$,
(G3) **逆元の存在**　任意の $a \in G$ に対して，ある $a' \in G$ が存在し，$a \circ a' = a' \circ a = e$.

注意. (G2) は「任意の $a \in G$ に対して，ある $e \in G$ が存在して，$a \circ e = e \circ a = a$ が成り立つ」とは**全く違う** ($\leftarrow$ なぜか考える！ヒント：「任意の〜」「存在する〜」は順番を変えると意味が変わる)

定義 (可換群，アーベル群). 群 $(G, \circ)$ の積 $\circ$ が交換法則を満たすとき，すなわち $a \circ b = b \circ a$ $(\forall a, b \in G)$ が成り立つとき，G を**可換群** (commutative group) または**アーベル群** (abelian group) という．群 G が可換群ではないとき，**非可換群**または**非アーベル群**という．

スポーツでもゲームでも，みんなが一緒に楽しむためには，全員が同じルールを共有する事が大切:

基本的なルール

- 二項演算 $\circ$ が明確にされている場合には，群 $(G, \circ)$ を単に**群** G と書く．
  また (定義から) 空集合 $\emptyset$ は群とは言わない．
- (G2) の $e \in G$ を群 G の**単位元**，(G3) の $a' \in G$ を a の**逆元**という．
- 二項演算は通常 $a \circ b = a \cdot b = ab$ と乗法的に書く (一般に交換法則は成り立たない：$ab \neq ba$).
- 群 G に対して，乗法 $(\cdot)$ による群 $(G, \cdot)$ か，加法 $(+)$ による群 $(G, +)$ かをはっきりさせたい時には，**乗法群** G，**加法群** G と言う (例えば，加法群 $\mathbb{Z}$ と言ったら，集合 $\mathbb{Z}$ を加法 $+$ について群 $(\mathbb{Z}, +)$ とみなすいう意味)．加法群のことを単に**加群**とよぶこともある．
- 加法群 $(G, +)$ に対しては，常に交換法則が成り立つと約束する：$a + b = b + a$ $(\forall a, b \in G)$.
- (逆に) 可換群 $(G, \circ)$ が与えられたとき，演算 $\circ$ を $+$ と書くことにして，加法群 $(G, +)$ と呼ぶことがある (加法群，加群，可換群，アーベル群は (演算記号の使い方が使うだけで) 全て同じ概念).
- 加法群 $(G, +)$ に対しては，単位元を**ゼロ元**といい 0，$a \in G$ に対する逆元 a' は $-a$ と書く．
- 乗法群 $(G, \cdot)$ に対しては，単位元は 1（又は 1_G），$a \in G$ に対する逆元 a' は a^{-1} と書く．
- 群 $(G, \circ)$ の集合としての位数 (元の個数) を群 G の**位数**といい，$|G|$ 又は $\#G$ で表す．
- 群 G に対し，G の位数 $|G| < \infty$ のとき**有限群**，G の位数 $|G| = \infty$ のとき**無限群**という．
- $G = \{1\}$ のとき，$(G, \cdot)$ はただ1つの元からなる群であり，**自明群**と呼ぶ．
- 有限集合 $X = \{a_1, \ldots, a_n\}$ に二項演算 $\circ$ が与えられたとき，その演算結果を表にしたものを $(X, \circ)$ に対する**演算表**と言った（右図）．X に二項演算を1つ与える事と，演算表を1つ指定する事は同じことである．特に，$X = G$ が群の場合，$(G, \circ)$ に対する演算表を**群表**という．

$\circ$	a_1	$\cdots$	a_j	$\cdots$
a_1	$a_1 \circ a_1$		$\downarrow$	
$\vdots$			$\downarrow$	
a_i	$\longrightarrow$	$\longrightarrow$	$a_i \circ a_j$	
$\vdots$				

- (群の同型) 2つの有限群 $(G, \circ)$ と $(G', \star)$ に対して，それぞれの群表が元の名前と順番を適当に変更して同じ形にできるとき，群 G と群 G' は**同型** (isomorphic) であるといい，$G \cong G'$ と書く．
- **群論**において，集合としては異なり $G \neq G'$ であっても，**同型**な群 $G \cong G'$ は**同じもの**とみなす．逆に，集合として同じ $G = G' = \{a_1, \ldots, a_n\}$ であっても，$(G, \circ)$ と $(G', \star)$ の群表が，元の名前と順番をどの様に変更しても同じ形できない (= 同型でない = 演算の構造が異なる) 場合には，群としては異なるものとして区別する: $(G, \circ) \not\cong (G, \star)$.