代数序論A（第7回・2009/05/28）小テスト

学籍番号		氏名	

[**1**] 0 以上の整数 $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ と $0 \leq k \leq n$ に対して，**二項係数**は次で定義される：

$$\binom{n}{k} := \boxed{}$$

[**2**] $n \in \mathbb{N}$ と $1 \leq k \leq n$ に対して，以下を示せ：

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

[**証明**]

[**3**] **(二項定理) (3 点)** 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，以下が成り立つことを**数学的帰納法**を用いて示せ：

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

[**証明**]

[4] **(3 点)** 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，以下が成り立つことを**数学的帰納法**を用いて示せ：

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

[**証明**]

[5] **(2 点)** $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を**フィボナッチ数列**とする．**ビネの公式**によって，

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} \text{ である．但し，} \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

$-\dfrac{1}{2} < \dfrac{\beta}{\alpha} < 0$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n = 0$ であることを用いて，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n} = \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ を示せ．

[**証明**]