代数序論Ｂ（第１回・2010/04/08）

授業の目標．

次年度から本格的に始まる，代数のいくつかの話題を先取りして学び，まずはその概念の存在を知って慣れること．毎回，具体例を中心に今後代数の授業で出てくる事柄を取り上げ，特に分かりにくい部分を学生同士で議論して考える．さらに解説を加えて，理解を深める事を目標とする．

授業のねらい．

次年度から始まる代数の授業では，これまでになかったような抽象的概念，(現代的な数学の) 新しい考え方が多く出てくる．そのため，困惑し，十分な理解が得られない学生も少なくない．多くの新しい概念のうち，キーポイントとなるものをこの授業で取り上げ，先に学んでおくことによって，今後の代数の授業におけるつまずきを少しでも減らし，理解を深める為の手助けを行う．

授業の進め方．

①**通常の授業** 部分と②**グループワーク** からなる．
①と②でメリハリを付ける必要がある．特に，①の**授業時は私語厳禁!!**
グループワーク時は，2–4 人のグループに分かれて，グループ毎にディスカッションを行い，学生同士の意見交換を通じて，その理解を深める．また，適宜，他のグループに対して発表を行う．

授業の予定．

回	木 3	13:00–13:10	13:10–14:30
1	4/8	イントロダクション	
2	4/15	小テスト	あみだくじと置換 (集合の元，写像 (置換) の合成，直積集合，二項演算)
3	4/22	小テスト	集合と写像 (全射・単射・全単射)・置換の定義の再考
4	5/6	小テスト	群 (置換群) とその同型 (群表による定義)・群表の考察 (部分群・巡回群)
5	5/13	小テスト	二項係数と二項定理 (パスカルの三角形とフラクタル・フィボナッチ数)
6	5/20	小テスト	数学的帰納法 (予想を立てて証明・二項定理・べき乗和公式・ベルヌーイ数)
7	5/27	小テスト	論理の練習 (「任意の」「存在する」とその否定，ε-δ 論法，背理法)
8	6/3	**中間試験**	
9	6/10	小テスト	群の定義とその具体例 (置換群，巡回群，二面体群，行列群)
10	6/17	小テスト	準同型写像と群の同型の再考 (集合間の写像とその解釈)
11	6/24	小テスト	ユークリッドの互除法・互いに素な数の特徴付け (最大公約数・最小公倍数)
12	7/1	小テスト	同値関係と合同・同値類による類別 (クラス分け)，例:相似変換と不変量
13	7/8	小テスト	剰余群 (商群，$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$) と well-defined・有限体 ($\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$) の世界とは
14	7/15	小テスト	3 次方程式の解 (二分法・ニュートン法) と解の公式・ガロア理論への道
15	7/22	**期末試験 (教場試験)**	

教科書．

佐藤文広著「これだけは知っておきたい数学ビギナーズマニュアル」日本評論社.

参考文献．

鈴木晋一著「集合と位相への入門」サイエンス社 (= **参考書**, 数学序論 1B(A) の参考書 (教科書)).
硲文夫著「論理と代数の基礎」培風館　(この他にも，授業中に適宜紹介する．)

成績評価方法．

毎回の小テスト・演習，2 回の試験 (中間，期末) 及び授業中に出題されるレポート課題によって総合的に評価する．
小テスト 10 点× 12=120 点
中間試験　　　　100 点
期末試験　　　　100 点
グループワーク，及び授業中に出されるレポート課題によって，さらに**ボーナス点**を加点する．
期末試験の得点が，これまでに比べて顕著によかった場合にも**ボーナス点**を加点することがある．

Web と e-mail の連絡先．

http://www2.rikkyo.ac.jp/web/hoshi/
hoshi アット rikkyo.ac.jp (アットには@が入ります).

定義 (集合)．集合とは，そのメンバーであるか (属しているか) 否かを一意的 (unique) に判定できるような**ものの集まり**のこと．(← 「一意的」については教科書 p.35 を見ること)

定義 (要素, 元)． 集合 S に属するメンバーを，その集合の**元**，または**要素**といい，

x が S の元であることを $x \in S$, (←「x は S に属する (含まれる) と読む」)
x が S の元でないことを $x \notin S$ と書く．(←「x は S に属さない (含まれない) と読む」)

集合の例 (教科書 pp.15–16, p.22)．

$\mathbb{N}$	自然数全体の集合	自然数 = natural numbers
$\mathbb{Z}$	整数全体の集合	整数 = integers, Zahlen (ドイツ語 ganze Zahlen)
$\mathbb{Q}$	有理数全体の集合	有理数 = rational numbers だが quotient (分数) の q ($\mathbb{R}$ と区別する為)
$\mathbb{R}$	実数全体の集合	実数 = real numbers
$\mathbb{C}$	複素数全体の集合	複素数 = complex numbers

• 例えば，$\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ であるが $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$．$\sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$ であるが $\sqrt{-1} \in \mathbb{C}$ など．

集合の表記 (参考書 p.10)．集合の表し方には，要素を書き並べる方法 (外延的記法)

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

と，要素であるための条件を書く方法 (内包的記法) がある：

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}.$$

• 例えば，$S = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ は } 12 \text{ の約数}\}$．

定義 (部分集合)(参 p.11)．集合 B のいくつかの元からなる集合 A を，B の**部分集合** (subset) と言い，$A \subset B$ と書く (A は B に含まれるともいう)．すなわち，A が B の**部分集合**であるとは，

$$\text{任意の (すべての) } x \in A \text{ に対して，} x \in B$$

が成り立つことである (← なぜか？各自考える！「任意の」については，教科書 p.35 を見ること)．A が B の**部分集合でない**とき $A \not\subset B$ と書く．$A \subset B$ かつ $B \subset A$ のとき，集合 A と B は**等しい**と言い，$A = B$ と書く．

定義 (空集合)(参 p.13)．要素を１つも含まないものの集まりも１つの集合とみなし，**空集合**と呼んで記号 $\emptyset$ で表す．(← 定義から空集合はどんな集合に対してもその部分集合となる)

• 例えば，$S = \{0, 1\}$ の部分集合は $\emptyset$, $\{0\}$, $\{1\}$, $\{0, 1\} = S$ の４つ．

定義 (和集合，共通部分，差集合，補集合)(参 p.12)． 集合 U の部分集合 A, B に対して，

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ または } x \in B\} \text{ ; } A \text{ と } B \text{ の和集合 (union)}$$
$$A \cap B := \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B\} \text{ ; } A \text{ と } B \text{ の共通部分 (intersection)}$$
$$A - B := \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \notin B\} \text{ ; 差集合 (difference set)}$$
$$A^c := \{x \in U \mid x \notin A\} \text{ ; } A \text{ の (} U \text{ の中での) 補集合 (complement)}$$

と定義する．(← $\mathbf{X} := \mathbf{Y}$ は $\mathbf{Y}$ で $\mathbf{X}$ を定義するという意味)．差集合 $A - B$ を $A \setminus B$ とも書く．

定義 (直積集合)(参 p.16)．n 個の集合 $A_1, \ldots, A_n$ に対して，A_i の要素 $a_i \in A_i$ を順番に並べた組 $(a_1, \ldots, a_n)$ 全体の集合

$$\big\{(a_1, \ldots, a_n) \,\big|\, a_i \in A_i, (i = 1, \ldots, n)\big\}$$

を A_i, $(i = 1, \ldots, n)$ の**直積集合** (direct product) といい $A_1 \times \cdots \times A_n$ と書く．

• 例えば，平面 $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ は直積集合.