

演習問題の解答

[2] (p.11)

- (i) $S_2 = \{(1), a\}$, $a = (1\ 2)$,
(ii) $S_3 = \{(1), a, b, c, d, e\}$, $a = (1\ 2\ 3)$, $b = (1\ 3\ 2)$, $c = (1\ 2)$, $d = (1\ 3)$, $e = (2\ 3)$,
(iii) $X_3 = \{(1), a, b\}$, $a = (1\ 2\ 3)$, $b = (1\ 3\ 2)$,
(iv) $X_4 = \{(1), a, b\}$, $a = (1\ 4\ 3)$, $b = (1\ 3\ 4)$,
(v) $X_5 = \{(1), a, b, c\}$, $a = (1\ 2\ 3\ 4)$, $b = (1\ 3)(2\ 4)$, $c = (1\ 4\ 3\ 2)$,
(vi) $X_6 = \{(1), a, b, c\}$, $a = (1\ 2)(3\ 4)$, $b = (1\ 3)(2\ 4)$, $c = (1\ 4)(2\ 3)$,
(vii) $X_7 = \{(1), a, b, c\}$, $a = (1\ 5\ 2\ 3)$, $b = (1\ 2)(5\ 3)$, $c = (1\ 3\ 2\ 5)$,
(viii) $X_8 = \{(1), a, b, c\}$, $a = (1\ 2)$, $b = (3\ 4)$, $c = (1\ 2)(3\ 4)$,
(ix) $X_9 = \{(1), a, b, c, d\}$, $a = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$, $b = (1\ 3\ 5\ 2\ 4)$, $c = (1\ 4\ 2\ 5\ 3)$, $d = (1\ 5\ 4\ 3\ 2)$.

(i) S_2	$\circ$	(1)	a
	(1)	(1)	a
	a	a	(1)

(ii) S_3	$\circ$	(1)	a	b	c	d	e
	(1)	(1)	a	b	c	d	e
	a	a	b	(1)	d	e	c
	b	b	(1)	a	e	c	d
	c	c	e	d	(1)	b	a
	d	d	c	e	a	(1)	b
	e	e	d	c	b	a	(1)

(iii) X_3 , (iv) X_4	$\circ$	(1)	a	b
	(1)	(1)	a	b
	a	a	b	(1)
	b	b	(1)	a

(v) X_5 , (vii) X_7	$\circ$	(1)	a	b	c
	(1)	(1)	a	b	c
	a	a	b	c	(1)
	b	b	c	(1)	a
	c	c	(1)	a	b

(vi) X_6 , (viii) X_8	$\circ$	(1)	a	b	c
	(1)	(1)	a	b	c
	a	a	(1)	c	b
	b	b	c	(1)	a
	c	c	b	a	(1)

(ix) X_9	$\circ$	(1)	a	b	c	d
	(1)	(1)	a	b	c	d
	a	a	b	c	d	(1)
	b	b	c	d	(1)	a
	c	c	d	(1)	a	b
	d	d	(1)	a	b	c

[3] (p.11)

- (i) $Y_1 = \{1, a\}$, $a = -1$,
(ii) $Y_2 = \{1, a, b\}$, $a = (-1 + \sqrt{-3})/2$, $b = (-1 - \sqrt{-3})/2$,
(iii) $Y_3 = \{1, a, b, c\}$, $a = \sqrt{-1}$, $b = -1$, $c = -\sqrt{-1}$.

(i) Y_1	$\cdot$	1	a
	1	1	a
	a	a	1

(ii) Y_2	$\cdot$	1	a	b
	1	1	a	b
	a	a	b	1
	b	b	1	a

(iii) Y_3	$\cdot$	1	a	b	c
	1	1	a	b	c
	a	a	b	c	1
	b	b	c	1	a
	c	c	1	a	b

定義 (階乗) . 0 以上の整数 $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して, n の階乗 (factorial) $n!$ を

$$\begin{cases} 0! := 1, \\ n! := n(n-1) \cdots 2 \cdot 1, \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

と定義する .

定義 (二項係数) . $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ と $0 \leq k \leq n$ に対して ,

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

を二項係数 (binomial coefficient) とよぶ .

命題 . $n \in \mathbb{N}$ と $1 \leq k \leq n$ に対して , 以下が成り立つ :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

定理 (二項定理) . $n \in \mathbb{N}$ に対して , 以下が成り立つ :

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

定義 (フィボナッチ数列) . $F_1 = 1, F_2 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, (n \geq 3)$ で定まる数列 $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ をフィボナッチ (Fibonacci) 数列という . 各項 F_n は n 番目のフィボナッチ数といわれる .

例 . $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の最初の 20 項を書いてみる :

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, \dots$$

さらに 20 項ごとに求めてみると , 読めないような数 (!) になってしまう :

$$\begin{aligned} F_{20} &= 6765, \\ F_{40} &= 102334155, \\ F_{60} &= 1548008755920, \\ F_{80} &= 23416728348467685, \\ F_{100} &= 354224848179261915075, \\ F_{120} &= 5358359254990966640871840, \\ F_{140} &= 81055900096023504197206408605, \\ F_{160} &= 1226132595394188293000174702095995, \\ F_{180} &= 18547707689471986212190138521399707760, \\ F_{200} &= 280571172992510140037611932413038677189525. \end{aligned}$$

例 . n 項目 F_n が 1 つ前の $n-1$ 項目 F_{n-1} の何倍になっているかを計算してみる :

$$\begin{aligned} F_2/F_1 &= 1.00000000, & F_7/F_6 &= 1.62500000, & F_{12}/F_{11} &= 1.61797753, & F_{17}/F_{16} &= 1.61803445, \\ F_3/F_2 &= 2.00000000, & F_8/F_7 &= 1.61538462, & F_{13}/F_{12} &= 1.61805556, & F_{18}/F_{17} &= 1.61803381, \\ F_4/F_3 &= 1.50000000, & F_9/F_8 &= 1.61904762, & F_{14}/F_{13} &= 1.61802575, & F_{19}/F_{18} &= 1.61803406, \\ F_5/F_4 &= 1.66666667, & F_{10}/F_9 &= 1.61764706, & F_{15}/F_{14} &= 1.61803714, & F_{20}/F_{19} &= 1.61803396, \\ F_6/F_5 &= 1.60000000, & F_{11}/F_{10} &= 1.61818182, & F_{16}/F_{15} &= 1.61803279, & F_{21}/F_{20} &= 1.61803400. \end{aligned}$$

定義 (黄金比) . $x^2 = x + 1$ を満たす実数は

$$\alpha := \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \beta := \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

であり, 特に, 比 $1 : \alpha = 1.61803399 \dots$ は黄金比 (golden ratio) と呼ばれている.

定理 (ビネの公式) . フィボナッチ数列 $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の第 n 項は以下で与えられる:

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right\}.$$

定理 (フィボナッチ数の比の収束) . フィボナッチ数列 $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ に対して,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

法 (modulo) m の世界

定義 (法 m に関して合同) . 整数 $a, b \in \mathbb{Z}$ が法 m に関して合同 (congruent) であるとは, $a - b$ が m で割り切れることと定義し, $a \equiv b \pmod{m}$ とかく.

m を法としたフィボナッチ数列 .

$$\{F_n \pmod{2}\}_{n \in \mathbb{N}} : 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, \dots$$

$$\{F_n \pmod{3}\}_{n \in \mathbb{N}} : 1, 1, 2, 0, 2, 2, 1, 0, 1, 1, 2, 0, 2, 2, 1, 0, \dots$$

$$\{F_n \pmod{4}\}_{n \in \mathbb{N}} : 1, 1, 2, 3, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 1, 0, \dots$$

$$\{F_n \pmod{5}\}_{n \in \mathbb{N}} : 1, 1, 2, 3, 0, 3, 3, 1, 4, 0, 4, 4, 3, 2, 0, 2, 2, 4, 1, 0, 1, 1, 2, \dots$$

$$\{F_n \pmod{6}\}_{n \in \mathbb{N}} : 1, 1, 2, 3, 5, 2, 1, 3, 4, 1, 5, 0, 5, 5, 4, 3, 1, 4, 5, 3, 2, 5, 1, 0, 1, 1, 2, 3, \dots$$

定理 (フィボナッチ数列の周期性) . m を法としたフィボナッチ数列 $\{F_n \pmod{m}\}_{n \in \mathbb{N}}$ は周期性をもつ. すなわち, ある自然数 $N \in \mathbb{N}$ が存在して, 以下が成り立つ:

$$F_{n+N} \equiv F_n \pmod{m}, \quad n = 1, 2, \dots$$

フィボナッチ数列の周期性の証明には, 次の鳩の巣原理が有効に働く:

鳩の巣原理 (Pigeonhole principle), Dirichlet (ドイツ, 1805–1859) の部屋割り論法 .
 鳩の巣原理とは『整数 $n > m$ に対して, n 羽の鳩が m 個の巣に入っているとすると, ある巣には 2 羽以上の鳩が入っている』という原理のことを指す.

m を法としたパスカルの三角形 .

$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$
1	1	1	1
1 1	1 1	1 1	1 1
1 0 1	1 2 1	1 2 1	1 2 1
1 1 1 1	1 0 0 1	1 3 3 1	1 3 3 1
1 0 0 0 1	1 1 0 1 1	1 0 2 0 1	1 4 1 4 1
1 1 0 0 1 1	1 2 1 1 2 1	1 1 2 2 1 1	1 0 0 0 0 1
1 0 1 0 1 0 1	1 0 0 2 0 0 1	1 2 3 0 3 2 1	1 1 0 0 0 1 1
1 1 1 1 1 1 1	1 1 0 2 2 0 1 1	1 3 1 3 3 1 3 1	1 2 1 0 0 1 2 1

次の定理は、整数論の研究室に所属すれば証明を学ぶことができる (証明には、リーマンのゼータ関数を拡張したディリクレの L 関数というものが活躍する) :

Dirichlet の算術級数中の素数定理 . $m \in \mathbb{N}$ と $a \in \mathbb{N}$ は互いに素とする . このとき , $mn + a$ 型の素数は無限に存在する .

Dirichlet の算術級数中の素数定理 (II) . $m \in \mathbb{N}$ と $a \in \mathbb{N}$ は互いに素とする . このとき ,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\#\{x \text{ 以下の } mn + a \text{ 型の素数}\}}{\#\{x \text{ 以下の素数}\}} = \frac{1}{\#\{k \in \mathbb{N} \mid 1 \leq k \leq m \text{ かつ } k \text{ は } m \text{ と互いに素}\}}.$$

$m = 4$ の具体例 ($4n + 1$ 型の素数と $4n + 3$ 型の素数) .

200 以下の奇素数を $4n + 1$ 型と $4n + 3$ 型に分けてみる :

$\{5, 13, 17, 29, 37, 41, 53, 61, 73, 89, 97, 101, 109, 113, 137, 149, 157, 173, 181, 193, 197\},$
 $\{3, 7, 11, 19, 23, 31, 43, 47, 59, 67, 71, 79, 83, 103, 107, 127, 131, 139, 151, 163, 167, 179, 191, 199\}.$

$$\#\{x \text{ 以下の } 4n + 1 \text{ 型の素数}\} \leq \#\{x \text{ 以下の } 4n + 3 \text{ 型の素数}\}$$

かと思ってしまうが、さらに素数 26861 まで続けると初めて逆転現象が起こる (!):

x	5	17	41	100	200	461	...	26849	26861	...
$\#\{x \text{ 以下の } 4n + 1 \text{ 型の素数}\}$	1	3	6	11	21	44	...	1472	1473	...
$\#\{x \text{ 以下の } 4n + 3 \text{ 型の素数}\}$	1	3	6	13	24	44	...	1472	1472	...

それどころか、上述の Dirichlet の定理 (II) は次を主張している :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\#\{x \text{ 以下の } 4n + 1 \text{ 型の素数}\}}{\#\{x \text{ 以下の素数}\}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\#\{x \text{ 以下の } 4n + 3 \text{ 型の素数}\}}{\#\{x \text{ 以下の素数}\}} = \frac{1}{2}.$$

定理 (リュカ, 1876) . $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ をフィボナッチ数列 , $[x]$ を $x \in \mathbb{R}$ のガウス記号とする .

$$F_n = \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \cdots + \binom{\lfloor n/2 \rfloor}{\lfloor (n-1)/2 \rfloor}.$$

演習問題 (小テスト・中間テストの予想問題)

- [1] m を法としたパスカルの三角形を、蛍光ペンで色分けして作ってみよう! ($m = 2, 3, 4, 5$)
- [2] 次を示せ: (i) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$, (ii) $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.
- [3] 10 段の階段を 1 段または 2 段ずつ昇る方法は何通りあるか? 20 段ではどうか?

参考文献

- [1] はじめての数論—発見と証明の大航海 ピタゴラスの定理から楕円曲線まで, ジョセフ・H. シルヴァーマン (著), 鈴木 治郎 (翻訳), ピアソンエデュケーション (2001).
- [2] A Friendly Introduction To Number Theory (洋書), Joseph H. Silverman (著), Prentice Hall College Div; 3 版 (2005).
- [3] フィボナッチ数の小宇宙—フィボナッチ数、リュカ数、黄金分割, 中村 滋 (著), 日本評論社; 改訂版版 (2008).