

**復習.**  $(S_n, \circ)$  とは, 置換  $\sigma, \tau \in S_n$  に対して, 置換の合成 (積)  $\sigma \circ \tau \in S_n$  が定義された集合のこと.

**定理 ( $n$  次対称群  $S_n$  の性質).**  $(S_n, \circ)$  に対して, 次が成り立つ:

- (i) 積  $\circ$  は**結合法則**を満たす: 任意の  $\sigma, \tau, \rho \in S_n$  に対して,  $(\sigma \circ \tau) \circ \rho = \sigma \circ (\tau \circ \rho)$  が成り立つ.
- (ii) 置換  $\tau = (1) \in S_n$  は, 任意の置換  $\sigma \in S_n$  にかけても相手を変化させない:

任意の  $\sigma \in S_n$  に対して,  $\tau \circ \sigma = \sigma \circ \tau = \sigma$  が成り立つ. — ①

置換  $\tau = (1)$  のことを**恒等置換**と呼ぶ. (← 恒等写像に対応している!)

- (iii) 任意の置換  $\sigma \in S_n$  に対して,

$\sigma \circ \sigma' = \sigma' \circ \sigma = (1)$  を満たす置換  $\sigma' \in S_n$  が存在する. — ②

この  $\sigma'$  を  $\sigma$  の**逆置換**とよび,  $\sigma^{-1}$  と表す. (← 逆写像に対応している)

**命題 (恒等置換, 逆置換の一意性).** (← 「一意性」「一意的」については教科書 p.35 参照)

- (i) ①を満たすような置換  $\tau \in S_n$  は  $\tau = (1)$  のみである,
- (ii)  $\sigma \in S_n$  に対して, ②を満たすような置換  $\sigma'$  は一意的に定まる.

より感覚と合致している証明, 及び, 一般的 (理論的) で今後も使う証明をそれぞれ与える.

**証明 1.** (i)  $\tau \neq (1)$  とすれば, 異なる 2 つの整数  $i \neq j \in \mathbb{Z}$  が存在して  $\tau(i) = j$  となる. 互換  $(ij) \in S_n$  に対して,  $(ij) \circ \tau$  は  $i$  を動かさないのて,  $(ij) \circ \tau \neq (ij)$  であり,  $\tau$  は ①を満たさない.  
 (ii)  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$  とすれば,  $\sigma$  の逆置換は  $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$  であり, これ以外には存在しない. なぜなら, 下の段の  $k$  番目が  $k$  以外のとき  $\sigma \circ \sigma^{-1}(k) \neq k$  となるからである.

**証明 2.** (i) 2 つの置換  $\tau, \tau' \in S_n$  が ①を満たすと仮定すると,  $\tau = \tau'$  が導かれることを示す.  
 仮定より,  $\tau$  は  $\sigma = \tau'$  に対して  $\tau \circ \tau' = \tau' \circ \tau = \tau'$  を満たす. また,  $\tau'$  は  $\sigma = \tau$  に対して  $\tau' \circ \tau = \tau \circ \tau' = \tau$  を満たす. よって,  $\tau = \tau \circ \tau' = \tau'$  が導かれた.  
 (ii) 2 つの置換  $\sigma', \sigma'' \in S_n$  が ②を満たすと仮定すると,  $\sigma' = \sigma''$  が導かれることを示す.  
 仮定より,  $\sigma', \sigma''$  はそれぞれ  $\sigma \in S_n$  に対して,  $\sigma \circ \sigma' = \sigma' \circ \sigma = (1)$ ,  $\sigma \circ \sigma'' = \sigma'' \circ \sigma = (1)$  を満たす. ここで,  $(S_n, \circ)$  の積  $\circ$  が結合法則を満たすことに注意すれば (上記定理 (i)),  $\sigma' = \sigma' \circ (1) = \sigma' \circ (\sigma \circ \sigma'') = (\sigma' \circ \sigma) \circ \sigma'' = (1) \circ \sigma'' = \sigma''$  が得られる.

## 演習問題の解答

[1] (p.11)

- $S_3$  の演算表の各行各列には (1) が必ず出現し, また丁度一回しか現われない.
- ⊙ 任意の置換  $\sigma \in S_3$  に対して, その逆置換  $\sigma^{-1}$  が一意的に存在するから.
- $S_3$  の演算表の各行各列には, 同じ元が 2 度は現われず, また全ての元が現われる.
- ⊙ これは集合と写像の言葉 (**全射, 単射**) を使えば次のように言える.

$S_3 = \{a_1, \dots, a_6\}$  と  $\sigma \in S_3$  に対して,  $\sigma S_3 := \{\sigma \circ a_1, \dots, \sigma \circ a_6\}$  とおく. すると,  $\sigma S_3$  は  $\sigma$  が左端にある行に出現する置換全体の集合である. また, 積  $\circ$  の定義から,  $\sigma S_3$  は  $S_3$  の部分集合である ( $\sigma S_3 \subset S_3$ ). 上記の主張は, 写像  $f: S_3 \rightarrow \sigma S_3, a_i \mapsto \sigma \circ a_i$  ( $1 \leq i \leq 6$ ) が単射であると言い換えられる (← 各自, なぜかを必ず考えること!).  $f$  の単射性は  $f(a_i) = f(a_j) \Rightarrow \sigma \circ a_i = \sigma \circ a_j \Rightarrow \sigma^{-1} \circ (\sigma \circ a_i) = \sigma^{-1} \circ (\sigma \circ a_j) \Rightarrow (\sigma^{-1} \circ \sigma) \circ a_i = (\sigma^{-1} \circ \sigma) \circ a_j \Rightarrow (1) \circ a_i = (1) \circ a_j \Rightarrow a_i = a_j$  によって示される. (← ここで, **結合法則, 恒等置換・逆置換の存在**をフルに使っている (!))  
 よって,  $\sigma S_3 = S_3$  であり, 写像  $f$  は  $S_3$  から  $S_3$  への**全単射**を与えていることが分かった.

- $n$  次対称群  $S_n$ , 部分群  $X_i$  の演算表についても各行各列に全ての元が 1 回ずつ現われる.
- ⊙ 各自, なぜなのかを (上の証明をヒントにして) 必ず考えること (!).
- (← ヒント  $X_i$  の性質 (**結合法則, 恒等置換・逆置換の存在とその一意性**)).
- **同型な群**は,  $X_3$  と  $X_4$ ,  $X_5$  と  $X_7$ ,  $X_6$  と  $X_8$  である.

**数学的帰納法** (Mathematical induction). 自然数  $n \in \mathbb{N}$  に関する命題  $P(n)$  に対して,

- (i) 命題  $P(1)$  は成立する,
  - (ii) 命題  $P(n)$  が成立すると仮定すれば, 命題  $P(n+1)$  は成立する,
- の2つの条件が示されれば, 命題  $P(n)$  は任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して成立する.

● 数学的帰納法にはいくつかの派生した形がある. 例えば, 1 以外から始まるもの, (i) の代わりに (i') 命題  $P(1), \dots, P(n)$  が成立する, を仮定するもの,  $n, m \in \mathbb{N}$  に関する命題  $P(m, n)$  について  $m, n$  を2次元で動かす数学的帰納法もある. また, 2つの命題  $P(n)$  と  $Q(n)$  を平行して扱う数学的帰納法も存在する.

**鳩の巣原理** (Pigeonhole principle). 鳩の巣原理とは『整数  $n > m$  に対して,  $n$  羽の鳩が  $m$  個の巣に入っているとすると, ある巣には2羽以上の鳩が入っている』という原理のことを指す.

● 鳩の巣原理は非常に単純な原理であるが, 組み合わせ論をはじめとして数学の多くの分野の証明で威力を発揮する. 必ずどの巣かには, 2羽以上入っているのであるが, 具体的にどの巣に入っているかは一切分からない, という面白さ (難しさ) を持ち合わせている.

**友愛数, 完全数** (Amicable number, Perfect number).

- (1) 異なる2つの自然数の組  $(a, b) \in \mathbb{N}^2$  は,  $a$  の自分自身を除いた約数の和が  $b$  となり, かつ  $b$  の自分自身を除いた約数の和が  $a$  となると **友愛数** であるという.
- (2) 自然数  $a \in \mathbb{N}$  は自分自身を除いた約数の和が  $a$  そのものと一致するとき, **完全数** という.

**例 (友愛数, 完全数)**. (1) 友愛数の例として,  $(220, 284)$ ,  $(1184, 1210)$ ,  $(2620, 2924)$ ,  $(5020, 5564)$ ,  $(6232, 6368)$ ,  $(10744, 10856)$  などがある.

(2) 完全数の例として, 6, 28, 496, 8128, 33550336, 8589869056 などがある. しかし, 友愛数が無限にあるか, 偶数の完全数が無限にあるか, 奇数の完全数が1つでもあるかは知られていない.

**未定係数法** (Method of undetermined coefficients). 係数  $a_1, \dots, a_k$  を用いたある形で等式が成立する事を予想し, いくつかの条件から係数  $a_1, \dots, a_k$  を決定する方法.

**例 (2乗和の公式)**.  $\sum_{k=1}^n k^2$  が  $n$  の3次以下の公式で書けると仮定する.

すなわち,  $\sum_{k=1}^n k^2 = an^3 + bn^2 + cn + d$ ,  $(a, b, c, d \in \mathbb{Q})$  と書けると仮定する.  $n = 1, 2, 3, 4$  を代入し,  $1 = a + b + c + d$ ,  $5 = 8a + 4b + 2c + d$ ,  $14 = 27a + 9b + 3c + d$ ,  $30 = 64a + 16b + 4c + d$  を得る. これを解けば,  $(a, b, c, d) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, 0)$  を得る. すなわち, 3次以下の公式が存在すれば,  $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$  でなくてはならない.

**べき乗和の公式**.  $s, n \in \mathbb{N}$  を自然数とする.  $n$  個の  $s$  乗和

$$F_s(n) := \sum_{k=1}^n k^s \quad \text{に対して,} \quad F_s(n) = \frac{1}{s+1} \left\{ (n+1)^{s+1} - 1 - \sum_{j=0}^{s-1} \binom{s+1}{j} F_j(n) \right\}$$

が成り立つ.

**ベルヌーイ数** (Bernoulli numbers). ベルヌーイ数  $B_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) を

$$\sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} B_k = n+1$$

によって定める. ベルヌーイ数  $B_n$  は小さい方から以下の様になる:

|       |   |               |               |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |
|-------|---|---------------|---------------|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|
| $n$   | 0 | 1             | 2             | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| $B_n$ | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{6}$ | 0 |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |

**演習問題 (小テスト・中間テストの予想問題)**

- [1] 二項定理を数学的帰納法によって証明せよ. すなわち, 任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して, 以下が成り立つことを示せ:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

- [2] 任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して, 以下が成り立つことを数学的帰納法を用いて示せ.

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

- [3] (2 乗和, 3 乗和の公式) 任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して, 以下を数学的帰納法によって示せ.

$$(i) \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad (ii) \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

- [4] ( $s$  乗和の公式) 以下の  $s$  乗和 ( $s = 4, 5, 6$ ) を与える公式を予想し, 証明せよ.

$$(i) \sum_{k=1}^n k^4, \quad (ii) \sum_{k=1}^n k^5, \quad (iii) \sum_{k=1}^n k^6.$$

- [5]  $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  をフィボナッチ数列とする. 以下を数学的帰納法によって示せ.

$$(i) F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1,$$

$$(ii) F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1}.$$

- [6]  $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  をフィボナッチ数列とする.

数学的帰納法により, 以下の命題  $P(n)$ ,  $Q(n)$  が, 任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して成り立つことを示せ.  
(← ヒント:  $P(n)$  と  $Q(n)$  を仮定して,  $P(n+1)$  と  $Q(n+1)$  を示す.)

$$P(n): F_{n+1}^2 + F_n^2 = F_{2n+1},$$

$$Q(n): 2F_{n+1}F_n + F_{n+1}^2 = F_{2n+2}.$$

- [7]  $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  をフィボナッチ数列とし,

$$x_n := F_n F_{n+3}, \quad y_n := 2F_{n+1} F_{n+2}, \quad z_n := F_{2n+3}$$

とおく. このとき, 任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して  $(x_n, y_n, z_n) \in \mathbb{N}^3$  はピタゴラスの定理を満たす, すなわち

$$x_n^2 + y_n^2 = z_n^2$$

を満たすことを示せ. これより,  $x^2 + y^2 = z^2$  を満たす  $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$  は無限にあることを示せ.  
(← ヒント 問 [5], [6] は自由に使ってよい)

**レポート課題 (提出期限 5 月 27 日)**

**注** 提出にあたっては「レポート提出に関する注意事項 (p.6)」(1)-(7) を参照のこと.

- [1] (自由提出) 課題名「2 を法としたパスカルの三角形」  
2 を法としたパスカルの三角形に対して, 第  $k$  行 ( $k = 0, 1, \dots$ ) の 1 の数を与える公式を予想し, それが正しいことを証明する. 3 を法とした場合にも何らかの予想ができれば, なお望ましい.

**参考文献**

- [1] ベルヌーイ数とゼータ関数, 荒川 恒男, 金子 昌信, 伊吹山 知義 (著), 牧野書店 (2001).  
[2] フィボナッチ数の小宇宙—フィボナッチ数、リュカ数、黄金分割, 中村 滋 (著), 日本評論社; 改訂版版 (2008).

$$s \text{ 乗和の公式 } F_s(n) := \sum_{k=1}^n k^s$$

$$\begin{aligned}
s=1, \quad F_1(n) &= \frac{1}{2}n(n+1) \\
s=2, \quad F_2(n) &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \\
s=3, \quad F_3(n) &= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 \\
s=4, \quad F_4(n) &= \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1) \\
s=5, \quad F_5(n) &= \frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1) \\
s=6, \quad F_6(n) &= \frac{1}{42}n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1) \\
s=7, \quad F_7(n) &= \frac{1}{24}n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2) \\
s=8, \quad F_8(n) &= \frac{1}{90}n(n+1)(2n+1)(5n^6+15n^5+5n^4-15n^3-n^2+9n-3) \\
s=9, \quad F_9(n) &= \frac{1}{20}n^2(n+1)^2(n^2+n-1)(2n^4+4n^3-n^2-3n+3) \\
s=10, \quad F_{10}(n) &= \frac{1}{66}n(n+1)(2n+1)(n^2+n-1)(3n^6+9n^5+2n^4-11n^3+3n^2+10n-5) \\
s=11, \quad F_{11}(n) &= \frac{1}{24}n^2(n+1)^2(2n^8+8n^7+4n^6-16n^5-5n^4+26n^3-3n^2-20n+10) \\
s=12, \quad F_{12}(n) &= \frac{1}{2730}n(n+1)(2n+1)(105n^{10}+525n^9+525n^8-1050n^7-1190n^6+2310n^5+1420n^4-3285n^3-287n^2+2073n-691) \\
s=13, \quad F_{13}(n) &= \frac{1}{420}n^2(n+1)^2(30n^{10}+150n^9+125n^8-400n^7-326n^6+1052n^5+367n^4-1786n^3+202n^2+1382n-691) \\
s=14, \quad F_{14}(n) &= \frac{1}{90}n(n+1)(2n+1)(3n^{12}+18n^{11}+24n^{10}-45n^9-81n^8+144n^7+182n^6-345n^5-217n^4+498n^3+44n^2-315n+105) \\
s=15, \quad F_{15}(n) &= \frac{1}{48}n^2(n+1)^2(3n^{12}+18n^{11}+21n^{10}-60n^9-83n^8+226n^7+203n^6-632n^5-226n^4+1084n^3-122n^2-840n+420)
\end{aligned}$$