

学籍番号		氏名	
------	--	----	--

[1] (群の定義) 空でない集合  $G$  上に二項演算

$$f : G \times G \longrightarrow G, \quad (a, b) \longmapsto a \circ b := f(a, b)$$

が定義され, 次の3つの条件を満たすとき  $(G, \circ)$  を群 (group) という:

(G1) 結合法則

(G2) 単位元の存在

(G3) 逆元の存在

$n$  次対称群  $S_n$  は (その名の通り) 群である. 結合法則を満たすことは, 写像の合成  $\circ$  が結合法則を満たすこと (p.7) から分かる. 単位元は恒等置換  $(1)$ ,  $\sigma \in S_n$  の逆元は  $\sigma$  の逆置換  $\sigma^{-1}$ .

[2] 群  $G$  が  を満たすとき,

$G$  は可換群 (commutative group) またはアーベル群 (abelian group) と呼ばれる.

[3] 群  $G$  が乗法群  $(G, \cdot)$  の場合には,  $a \in G$  の逆元は  と書かれる.

また,  $G$  が加法群  $(G, +)$  の場合には,  $a \in G$  の逆元は  と書かれる.

[4] 群  $(G, \circ)$  の元の個数のことを, 群  $G$  の  といい,  $|G|$  又は  $\#G$  で表す.

群  $G$  は,  $\#G < \infty$  のとき有限群,  $\#G = \infty$  のとき無限群と呼ばれる.

[5] 群  $G$  の単位元を  $1$  とかくと, (部分群の定義から)  $G$  自身と  $\{1\}$  は  $G$  の部分群となる. この2つ

の部分群を,  と呼ぶ. また, 群  $\{1\}$  は自明群と呼ばれる.

[6] 2つの群  $(G, \circ), (G', \star)$  に対して, 全単射  $f : G \rightarrow G'$  が存在し,  $f(a \circ b) = f(a) \star f(b) (\forall a, b \in G)$

が成り立つとき, 群  $G$  と群  $G'$  は  (英語では isomorphic) であるといい,  $G \cong G'$

と表す.  $G, G'$  がともに有限群の場合には, これは元の名前と順番を適当に変更すれば, 群表 (演算表) が同じ形にできることに他ならない.

[7]  $G_1 = \{(1), a, b, c\}, G_2 = \{(1), b, d, e\}, G_3 = \{(1), b, f, g\},$

$$a = (1234), b = (13)(24), c = (1432), d = (12)(34), e = (14)(23), f = (13), g = (24)$$

とすれば,  $(G_1, \circ), (G_2, \circ), (G_3, \circ)$  は群であり,  $G_2 \cong$   である ( $G_2$  以外を答える).