代数序論A（第5回・2010/05/13）小テスト

学籍番号		氏名	

[1] X, Y を空でない集合とする．次の $\boxed{}$ を埋めて全射, 単射の定義を完成させよ．

但し, **「任意の〜に対して」「〜が存在する (して)」**を用いること．

(i) **(2 点)** 写像 $f : X \to Y$ が**全射**であるとは,

$\boxed{}$ ことである．

(ii) **(2 点)** 写像 $f : X \to Y$ が**単射**であるとは,

$\boxed{}$ が成り立つことである．

[2] 二項演算 $\circ$ が与えられた有限集合 $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ に対し，その二項演算の対応を以下の様に表にしたものを，$(X, \circ)$ **の演算表**と呼んだ：

$\circ$	a_1	a_2	$\cdots$	a_j	$\cdots$	a_n
a_1	$a_1 \circ a_1$	$a_1 \circ a_2$		$\vdots$		$a_1 \circ a_n$
a_2	$a_2 \circ a_1$	$a_2 \circ a_2$		$\vdots$		$a_2 \circ a_n$
$\vdots$				$\vdots$		$\vdots$
a_i	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$a_i \circ a_j$		$\vdots$
$\vdots$						$\vdots$
a_n	$a_n \circ a_1$	$a_n \circ a_2$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$a_n \circ a_n$

3 次対称群 S_3 の元 $\sigma, \tau \in S_3$ には，置換の積 $\sigma \circ \tau$ が写像の合成 $\sigma \circ \tau(i) := \sigma(\tau(i))$, $i \in \{1, 2, 3\}$ によって定義されていた．以下の空欄部分を埋め，$(S_3, \circ)$ の演算表を完成させよ．但し,

$$S_3 = \{(1), a, b, c, d, e\},\ a = (1\ 2\ 3),\ b = (1\ 3\ 2),\ c = (1\ 2),\ d = (1\ 3),\ e = (2\ 3)$$

とし，**空欄の中には必ず** (1), a, b, c, d, e **のどれかを入れること**.

$\circ$	(1)	a	b	c	d	e
(1)	(1)	a	b	c	d	e
a	a	$\boxed{}$	$\boxed{}$	d	e	c
b	b	$\boxed{}$	$\boxed{}$	e	c	d
c	c	$\boxed{}$	$\boxed{}$	(1)	b	a
d	d	$\boxed{}$	$\boxed{}$	$\boxed{}$	(1)	b
e	e	$\boxed{}$	$\boxed{}$	$\boxed{}$	$\boxed{}$	(1)

[3] 任意の置換 $\sigma \in S_n$ に対して,

$$\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = (1)$$

を満たす置換 $\sigma^{-1} \in S_n$ が存在し，σ **の逆置換**といった．例えば，$a = (1\ 2\ 3)$ の逆置換は $b = (1\ 3\ 2)$ であり, $c = (1\ 2)$ の逆置換は $c = (1\ 2)$ 自身である．

さて，**問** [2] の演算表には，各行各列に，必ず (1) が現われる．それがなぜかを説明せよ．