代数序論B（第11回・2010/06/24）小テスト

学籍番号		氏名	

[1] **(群の定義)** 空でない集合 G 上に二項演算

$$f : G \times G \longrightarrow G, \quad (a, b) \longmapsto a \circ b := f(a, b)$$

が定義され，次の3つの条件を満たすとき $(G, \circ)$ を**群** (group) という：

(G1) 結合法則 $\boxed{}$

(G2) 単位元の存在 $\boxed{}$

(G3) 逆元の存在 $\boxed{}$

n 次対称群 S_n は (その名の通り) 群である．結合法則を満たすことは，**写像の合成 $\circ$ が結合法則を満たす**こと (p.7) から分かる．単位元は**恒等置換** (1)，$\sigma \in S_n$ の逆元は σ の**逆置換** σ^{-1}.

[2] 群 G が $\boxed{}$ を満たすとき，

G は**可換群** (commutative group) または**アーベル群** (abelian group) と呼ばれる．

[3] 群 G が乗法群 $(G, \cdot)$ の場合には，$a \in G$ の逆元は $\boxed{}$ と書かれる．

また，G が加法群 $(G, +)$ の場合には，$a \in G$ の逆元は $\boxed{}$ と書かれる．

[4] 群 $(G, \circ)$ の元の個数のことを，群 G の $\boxed{}$ といい，$|G|$ 又は $\#G$ で表す．

群 G は，$\#G < \infty$ のとき**有限群**，$\#G = \infty$ のとき**無限群**と呼ばれる．

[5] 群 G の単位元を 1 とかくと，(部分群の定義から) G 自身と $\{1\}$ は G の部分群となる．この2つの部分群を，$\boxed{}$ と呼ぶ．また，群 $\{1\}$ は**自明群**と呼ばれる．

[6] 2つの群 $(G, \circ)$, $(G', \star)$ に対して，全単射 $f : G \to G'$ が存在し，$f(a \circ b) = f(a) \star f(b)$ $(\forall a, b \in G)$ が成り立つとき，群 G と群 G' は $\boxed{}$ (英語では isomorphic) であるといい，$G \cong G'$ と表す．G, G' がともに有限群の場合には，これは元の名前と順番を適当に変更すれば，群表 (演算表) が同じ形にできることに他ならない．

[7] $G_1 = \{(1), a, b, c\}$, $G_2 = \{(1), b, d, e\}$, $G_3 = \{(1), b, f, g\}$,

$a = (1\,2\,3\,4)$, $b = (1\,3)(2\,4)$, $c = (1\,4\,3\,2)$, $d = (1\,2)(3\,4)$, $e = (1\,4)(2\,3)$, $f = (1\,3)$, $g = (2\,4)$

とすれば，$(G_1, \circ)$, $(G_2, \circ)$, $(G_3, \circ)$ は群であり，$G_2 \cong \boxed{}$ である (G_2 以外を答える)．