代数序論Ｂ（第13回・2010/07/08）小テスト

学籍番号		氏名	

[1] **(同値関係)** 集合 X の 2 つの元の間に定義された関係 $\sim$ が，次の 3 つの条件を満たすとき，この関係 $\sim$ を**同値関係**という．

(1) **反射律** $\boxed{\qquad\qquad\qquad (\forall x \in X)}$,

(2) **対称律** $x \sim y \Longrightarrow y \sim x \quad (\forall x, y \in X)$,

(3) **推移律** $\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\forall x, y, z \in X)}$.

[2] **(同値類)** 同値関係 $\sim$ が定義された集合 X の各元 $a \in X$ に対して，

$C(a) := \boxed{\left\{ \qquad\qquad \right\}}$ を a を含む**同値類**という．$C(a)$ を $\boxed{\quad\text{または}\quad}$ とも表す．

[3] **(類別；クラス分け)** 集合 X に対し，次の 3 条件を満たす X の部分集合 $C_i, (i \in I)$ の集まりを X の**類別**または**クラス分け**という：

(1) $C_i \neq \emptyset$,　(2) $X = \bigcup_{i \in I} C_i$,　(3) $\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$.

> **定理．** 集合 X に同値関係 $\sim$ を定めると，同値類 $C(a)$ によって X の類別が得られる．

[4] 集合 X に同値関係 $\sim$ が定まっているとする．
X の同値関係 $\sim$ による同値類の集まり $\{C(a) \,|\, a \in X\}$ を，$\boxed{\qquad}$ 集合といい，

$$X/\sim \; := \{C(a) \,|\, a \in X\} \text{ と表す.}$$

[5] **(法 m に関して合同)** $m \in \mathbb{N}$ とする．
整数 $a, b \in \mathbb{Z}$ が**法 m に関して合同**である $(a \equiv b \pmod{m})$ とは，次を満たすこと：

$$a \equiv b \pmod{m} \iff \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

[6] $\mathbb{Z}$ における，法 m に関して合同という関係 $(\equiv)$ は，同値関係となる．また，この同値関係 $(\equiv)$ による $\mathbb{Z}/\equiv$ $(\leftarrow \mathbb{Z}/\sim$ のこと$)$ を $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ とかく．例えば $m = 5$ のとき，

$$a + 5\mathbb{Z} := \{a + 5n \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$$

と書けば，この $\underline{a + 5\mathbb{Z}\text{ を使って}}$ 次のように書ける：$(\leftarrow$ ヒント：$\#(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) = 5, \#(a+5\mathbb{Z}) = \infty)$

$$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \boxed{\left\{ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \right\}}$$

このときの各 (同値) 類 $a + 5\mathbb{Z}$ は**法 5 に関する剰余類**とも呼ばれる．

また，各 (同値) 類から $\boxed{\qquad\qquad}$ 元を 1 つずつとって作った集合を**完全代表系**という．

特に，$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ とその完全代表系 $\{0, 1, \ldots, m-1\}$ の間には全単射 (1 対 1 対応) がある．

[7] 群 G の元 $a, b \in G$ に対して，

$$a \sim b \iff \exists \tau \in G \text{ s.t. } b = \tau a \tau^{-1}$$

とすれば，$\sim$ は同値関係となる．このとき，$\sim$ による同値類を $\boxed{\qquad\qquad}$ 類という．