代数序論B（第14回・2010/07/15）小テスト

学籍番号		氏名	

[1] **(同値関係)** 集合 X の2つの元の間に定義された関係 $\sim$ が，
次の3つの条件を満たすとき，この関係 $\sim$ を**同値関係**という．

(1) **反射律**　$x \sim x$ $(\forall x \in X)$,

(2) **対称律**　$x \sim y$ ならば $y \sim x$ $(\forall x, y \in X)$,

(3) **推移律** $\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad (\forall x, y, z \in X)}$,

> **定理．** 集合 X に同値関係 $\sim$ を定めると，同値類 $C(a) = [a]$ によって X の類別が得られる．

[2] $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \{[0], [1], \ldots, [m-1]\}$ を考える．但し，$[a] = a + m\mathbb{Z} = \{a + mn \mid n \in \mathbb{Z}\} = \overline{a}$ である．
ここで，集合 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ に2つの演算，加法 $+$ と乗法 $\cdot$ を以下の様に定義する．

$$[a] + [b] := [a + b], \qquad [a] \cdot [b] := \boxed{\qquad}.$$

この同値類に対して定義された演算 $(+, \cdot)$ が，代表元の取り方に依らずに定まっていること，
すなわち $[a] = [a']$ かつ $[b] = [b']$ ならば $[a + b] = [a' + b']$ 及び $[ab] = [a'b']$ が成り立つことを，
w から始まる英単語1つを用いて，演算は $\boxed{\qquad}$ であるという．

[3] $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \cdot)$ に対して，$\overline{a} = [a]$ として，演算表を書いてみる：

$m = 2$

$\cdot$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$

$m = 3$

$\cdot$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

$m = 4$

$\cdot$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

$m = 5$

$\cdot$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

$m = 6$

$\cdot$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

よって，$m = 2, 3, 4, 5, 6$ のうち，$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ が**体**となる m は $\boxed{\qquad\qquad}$ である．

[4] $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times := \{[a] \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \mid \gcd(a, m) = 1\}$ に対して，$((\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times, \cdot)$ は位数 $\varphi(m)$ の可換群をなす．群 $((\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times, \cdot)$ を**既約剰余類群**, $\varphi(m)$ を $\boxed{\qquad}$ 関数と呼ぶ．

$\varphi(2) = 1$, $\varphi(3) = 2$, $\varphi(4) = 2$, $\varphi(5) = 4$, $\varphi(6) = 2$, $\varphi(7) = 6$, $\varphi(8) = 4$, $\varphi(9) = \boxed{\qquad}$.

[5] **(オイラーの定理)** 整数 $m \geq 2$ と $\gcd(a, m) = 1$ なる整数 $a \in \mathbb{Z}$ に対して，以下が成り立つ：

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}.$$

素数 p に対して，$m = p$ の場合，$\varphi(m) = \boxed{\qquad}$ であるから，**オイラー** (1707–1783) **の定理**はある数学者 (1601–1665) の名前が付いた $\boxed{\qquad}$ **の小定理**の拡張になっている．

(1) 2^{13} を13で割った余りは $\boxed{\qquad}$,　　(2) 5^{13} を12で割った余りは $\boxed{\qquad}$.