3文字の置換． $1,2,3$ の3つの文字の並べ替えてみると，

$$1\,2\,3,\quad 1\,3\,2,\quad 2\,1\,3,\quad 2\,3\,1,\quad 3\,1\,2,\quad 3\,2\,1$$

の6通りの順列ができる．($\leftarrow$ 何も並べ替えないものも考える)
この並べ替えを，それぞれ

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

と書いて，3文字の**置換** (permutation) と言う．例えば，

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

とは，$1 \mapsto 3,\ 2 \mapsto 2,\ 3 \mapsto 1$ なる並べ替え (=置換) を表す．

定義 (n 次対称群 S_n)． 一般に，n 文字 $\{1,2,\ldots,n\}$ の置換全体の集合を S_n と書く．すなわち

$$S_n := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \;\middle|\; \{i_1, i_2, \ldots, i_n\} \text{ は } \{1,2,\ldots,n\} \text{ の並べ替え} \right\}$$

である．この n 文字の置換全体の集合 S_n を n **次対称群** (symmetric group of degree n) と言う．

> n 次対称群 S_n は，非常に重要な概念である**群**の例になっているので，この様な名前で呼ばれる．一般に，群とは何か (群の定義) については第8回の講義で勉強し，さらに来年度 (2年生) の代数１では１年間を通して，群の理論 (=群論) を学ぶ．

命題． n **次対称群** S_n は $n!$ 個の元からなる，すなわち集合 S_n の位数は $n!$ である．($\leftarrow \#S_n = n!$)．

例． $\#S_2 = 2,\ \#S_3 = 6,\ \#S_4 = 24,\ \#S_5 = 120,\ \#S_6 = 720,\ \#S_7 = 5040,\ \#S_8 = 40320$ など．

定義 (置換の合成 (積))． 2つの置換 $\sigma, \tau \in S_n$ に対して，新たな置換 $\sigma \circ \tau$ を

$$(\sigma \circ \tau)(i) := \sigma(\tau(i)), \quad (i = 1, \ldots, n)$$

を満たす置換として定義し，置換 $\sigma \circ \tau$ を置換 σ と置換 τ の**合成** (または**積**) という．

置換の合成 (積) の例． 2つの置換

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

に対して，置換の合成 (積) $\sigma \circ \tau$ とは置換

$$\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

のことであり，置換の合成 (積) $\tau \circ \sigma$ とは置換

$$\tau \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

のことである ($\leftarrow$ 積は右から計算する!)．
特に，$\sigma \circ \tau \neq \tau \circ \sigma$ に注意する ($\leftarrow$ このことを，σ と τ は**非可換**ともいう)．

定義 (巡回置換)． 置換 $\sigma \in S_n$ が，列を適当に入れ替えて (← 「適当に」の意味については教科書 p.34 を見ること)

$$\sigma = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_{r-1} & i_r & i_{r+1} & i_{r+2} & \cdots & i_n \\ i_2 & i_3 & \cdots & i_r & i_1 & i_{r+1} & i_{r+2} & \cdots & i_n \end{pmatrix} \in S_n$$

となるとき，すなわち 置換 $i_1 \mapsto i_2 \mapsto i_3 \mapsto \cdots \mapsto i_r \mapsto i_1$ を引き起こすとき，置換によって動かない $i_{r+1}, \ldots, i_n$ は省略して，単に

$$\sigma = (i_1\, i_2 \cdots i_{r-1}\, i_r)$$

と表し，**長さ** r **の巡回置換** (cycle) と呼ぶ．但し，σ が何も動かさない置換のとき，すなわち

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

の場合には，$\sigma = (1)$ と書くことにする (動かないものを全て省略すると，何もなくなる為)．

巡回置換の例． 置換

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \in S_5$$

は置換 $2 \mapsto 4 \mapsto 3 \mapsto 2$ を表しているので，

$$\sigma = (2\,4\,3)$$

と書き，σ は長さ 3 の巡回置換である．

命題 (サイクル分解)． 任意の置換 $\sigma \in S_n$ は互いに共通の数字を含まないいくつかの巡回置換の積で書ける．この表示を σ の**サイクル分解** (cycle decomposition) とよぶ．

命題． 2 つの巡回置換 σ, τ は互いに共通の数字を含まないならば $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$．(← **可換**という)．

例 (サイクル分解)． 8 文字の置換

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 8 & 7 & 2 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \in S_8$$

のサイクル分解は $\sigma = (2\,5) \circ (3\,8\,6) \circ (1\,4\,7)$ で与えられ，$\sigma = (1\,4\,7) \circ (3\,8\,6) \circ (2\,5)$ でもある．

定義 (互換, 隣接互換)． 長さ 2 の巡回置換 $(i\ j)$ を**互換** (transposition) という．互換の中でも特に，隣り合った数字からなる互換 $(i\quad i+1)$ のことを**隣接互換** (elementary transposition) という．

互換と隣接互換の例． (i) 次の置換は $3 \leftrightarrow 4$ を表しており，隣接互換である：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} = (3\,4) \in S_5$$

(ii) 置換 $(1\,3) \in S_3$ は $1 \leftrightarrow 3$ を表しており，互換ではあるが隣接互換ではない．
(iii) 置換

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \in S_5$$

は互換ではないが，サイクル分解は隣接互換の積 $\sigma = (1\,2) \circ (4\,5)$ である．

演習問題 (小テストの予想問題)

[1] 置換

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&4&5&1\end{pmatrix},\quad \tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&4&5&3\end{pmatrix},\quad \rho=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&2&1&5&3\end{pmatrix}$$

に対して，次の積を計算せよ．但し，答えは $\begin{pmatrix}1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\\ \boxed{\quad\quad ? \quad\quad}\end{pmatrix}$ の形で書くこと．

(i) $\sigma\circ\tau$ (ii) $\tau\circ\rho$ (iii) $\sigma\circ\rho$ (iv) $(\sigma\circ\tau)\circ\rho$ (v) $\sigma\circ(\tau\circ\rho)$

[2] 次の置換のサイクル分解 (=共通の数字を含まない巡回置換の積) を求めよ．

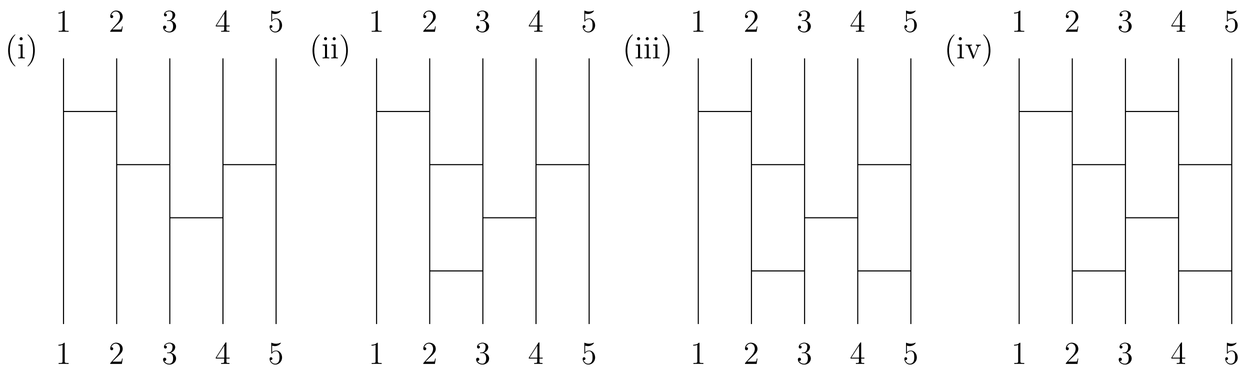
(i) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&4&5&1\end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&1&5&4\end{pmatrix}$ (iii) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&4&3&5\end{pmatrix}$ (iv) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&1&4&5&2\end{pmatrix}$

[3] 次の積を計算せよ．但し，答えは巡回置換 $(1\,\boxed{\ \ ?\ \ })$ の形で書くこと．

(i) $(1\,2)\circ(2\,3)$ (ii) $(1\,2)\circ(2\,3\,4)$ (iii) $(1\,2\,3)\circ(3\,4\,5)$ (iv) $(1\,2\,3\,4\,5)\circ(1\,3\,4\,2\,5)$

[4] (前問の (i),(ii),(iii) の様に) 巡回置換 $(1\,2\cdots n)$ はどこで切っても巡回置換の積 $(1\,2\cdots r-1\ r)\circ(r\ \ r+1\cdots n-1\ n)$ と等しくなるか？

[5] 縦の棒が n 本のあみだくじに，左から順に番号 $1,\ldots,n$ を付ける．このあみだくじによって $\{1,\ldots,n\}$ の置換 $\sigma\in S_n$ が1つ定まる．次のあみだくじに対応する $\sigma\in S_5$ の元は何か？ $\sigma=\begin{pmatrix}1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\\ \boxed{\quad\quad ? \quad\quad}\end{pmatrix}\in S_5$ の形とそのサイクル分解を共に答えること．



[6] **問**　逆に，任意の置換 $\sigma\in S_n$ に対し，σ に対応するあみだくじは必ず存在するだろうか？

次の (i)〜(ii) を解きながら，**問**の答えを考えてみよう．また，存在する場合にはどのように作ったらよいだろうか．(ヒント　それぞれ1つ前の問を参考にしながら考えてみる)

(i)-1 巡回置換 $(1\,2\,3\,4\,5)$ に対応するあみだくじを横棒4本だけを使って作れ．
(ヒント　分からない場合には，$(1\,2),(1\,2\,3),(1\,2\,3\,4)$ と順に考えてみる)
(i)-2 巡回置換 $(1\,2\,3\,4\,5)$ を4つ隣接互換の積で書け．
(ヒント　分からない場合には，**[4]** を繰り返し使ってもよい)
(i)-3 長さ r の巡回置換 $(j_1\,j_2\cdots j_r)$ は $r-1$ 個の互換の積で表せる事を示せ (具体的に書く)．
(i)-4 一般に，置換 $\sigma\in S_n$ はいくつかの互換の積で表せる事を説明せよ．

(ii)-1 互換 $(1\,5)$ に対応するあみだくじを横棒を7本で4種類以上書け．
(ヒント　分からない場合にはまず，$(1\,2),(1\,3),(1\,4)$ と徐々に数字を離してみる)
(ii)-2 互換 $(1\,5)$ を7つ隣接互換の積として $(1\,2)\circ\boxed{\ \ ?\ \ }\circ(1\,2)$ の形で表せ．
(ii)-3 一般に，任意の互換 $(i\,j)$ は隣接互換の積で表される事を，実際に書いて示せ．

(iii) **問**の答えを書き，なぜかを (分かりやすく) 説明せよ．

(iv) 上記 (i)-(iii) を参考にして，次の置換に対応するあみだくじを実際に書け．但し，取り除ける横棒 (連続した横棒 $\mathrel{\vert\!\!=\!\!\vert}$ など) は取り除いて，出来る限り横棒の数を少なくすること．
(iv)-1 $(1\,2\,3\,5\,4)$ (iv)-2 $(1\,3\,2\,4\,5)$ (iv)-3 $(1\,5\,3\,4\,2)$