**定義 (同値関係)**(教科書 p.112, 参考書 p.27)**.** 集合 $X$ の2つの元の間に定義された関係 $\sim$ が，次の3つの条件を満たすとき，$\sim$ を**同値関係** (equivalence relation) という．(← 参考書の記号は $a\mathbf{R}b$)

(1) **反射律** $a \sim a \quad (\forall a \in X)$,
(2) **対称律** $a \sim b \implies b \sim a \quad (\forall a, b \in X)$,
(3) **推移律** $a \sim b$ かつ $b \sim c \implies a \sim c \quad (\forall a, b, c \in X)$.

**定義 (同値類).** 同値関係 $\sim$ が定義された集合 $X$ の各元 $a \in X$ に対して，$C(a) := \{x \in X \mid a \sim x\}$ を $a$ を含む**同値類** (equivalent class) といい，$\overline{a}$ または $[a]$ と表す．同値類 $C(a)$ の1つの元 $x \in C(a)$ をとって，$x$ は $C(a)$ の**代表元** (representative) という．(← $a$ は $C(a)$ の代表元の1つである)

**定義 (類別；クラス分け).** 集合 $X$ に対し，次の3条件を満たす $X$ の部分集合 $C_i, (i \in I)$ の集まりを $X$ の**類別** (classification) または**クラス分け**という：

(1) $C_i \neq \emptyset$,
(2) $X = \bigcup_{i \in I} C_i$,
(3) $C_i \neq C_j \implies C_i \cap C_j = \emptyset$.

**定理.** 集合 $X$ に同値関係 $\sim$ を定めると，同値類 $C(a)$ によって $X$ の類別が得られる．逆に，$X$ の類別が与えられると,「$a \sim b \iff a$ と $b$ は同じ類」によって，$X$ に同値関係が定義できる．

$\because$ 反射律から $a \in C(a)$ であり，$C(a) \neq \emptyset$. $a \sim b$ を仮定すれば，対称律から $b \sim a$ であり，$x \in X$ に対して，推移律より $a \sim x \iff b \sim x$ が分かる．これは，$C(a) = C(b)$ を表わしている．また，$a \not\sim b$ を仮定して，$c \in C(a) \cap C(b)$ とすれば，$a \sim c$ かつ $b \sim c$ であり，対称律，推移律より $a \sim b$ となり仮定に反する．よって，$C(a) \cap C(b) = \emptyset$ であることが分かる．

**定義 (商集合).** $X$ の同値類の集まりを，$X$ の同値関係 $\sim$ による**商集合** (quotient set) といい，

$$X/\sim := \{C(a) \,|\, a \in X\} = \{\overline{a} \mid a \in X\} = \{[a] \,|\, a \in X\} \quad \text{と表す.}$$

• ここで，法 $m$ の世界のことを思い出す (p.14 参照).

**法 $m$ に関して合同.** $m \in \mathbb{N}$ とする．整数 $a, b \in \mathbb{Z}$ が法 $m$ に関して**合同** (congruent) であるとは，$a - b$ が $m$ で割り切れることと定義し，$a \equiv b \pmod{m}$ とかく．すなわち，

$$a \equiv b \pmod{m} \iff m \mid a - b.$$

**命題 [1].** $\mathbb{Z}$ における，法 $m$ に関して合同という関係 $(\equiv)$ は，同値関係である．(← 各自示す)

**例 (法 $m$ に関する剰余類).** $\mathbb{Z}$ の2つの元 $a, b \in \mathbb{Z}$ に定義された，法 $m$ に関して合同 $a \equiv b \pmod{m}$ という同値関係 $\equiv$ による $\mathbb{Z}$ の類別を考える．いま，

$$a + m\mathbb{Z} := \{a + mn \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$$

と書けば，$a + m\mathbb{Z} = \overline{a} = [a]$ であり，合同 $\equiv$ による類別は

$$\begin{aligned}
&m = 2\,; && \mathbb{Z} = 2\mathbb{Z} \cup (1 + 2\mathbb{Z}), && \mathbb{Z} = \overline{0} \cup \overline{1}, \\
&m = 3\,; && \mathbb{Z} = 3\mathbb{Z} \cup (1 + 3\mathbb{Z}) \cup (2 + 3\mathbb{Z}), && \mathbb{Z} = \overline{0} \cup \overline{1} \cup \overline{2}, \\
&m = 4\,; && \mathbb{Z} = 4\mathbb{Z} \cup (1 + 4\mathbb{Z}) \cup (2 + 4\mathbb{Z}) \cup (3 + 4\mathbb{Z}), && \mathbb{Z} = \overline{0} \cup \overline{1} \cup \overline{2} \cup \overline{3}
\end{aligned}$$

のように与えられる．$m = 5$ のときの $\mathbb{Z}$ の合同 $\equiv$ による類別 (**イメージ図**)：

$\mathbb{Z}$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $5\mathbb{Z}$ $\times 0$ | $1 + 5\mathbb{Z}$ $\times 1$ | $2 + 5\mathbb{Z}$ $\times 2$ | $3 + 5\mathbb{Z}$ $\times 3$ | $4 + 5\mathbb{Z}$ $\times 4$ |
| $= \overline{0}$ $\times 5$ | $= \overline{1}$ $\times 6$ | $= \overline{2}$ $\times 7$ | $= \overline{3}$ $\times 8$ | $= \overline{4}$ $\times 9$ |
| $= [0]$ $\times 10$ | $= [1]$ $\times 11$ | $= [2]$ $\times 12$ | $= [3]$ $\times 13$ | $= [4]$ $\times 14$ |

- 法 $m$ に関して合同という同値関係 $\equiv$ による商集合 $\mathbb{Z}/\equiv$ ($\leftarrow \mathbb{Z}/\sim$ のこと) を $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ とかく；

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{m-1}\} = \{[0], [1], \ldots, [m-1]\}.$$

各同値類は**法 $m$ に関する剰余類**とも呼ばれる．また，各剰余類から代表元を 1 つずつ取って作った集合を**完全代表系** (complete system of representatives) という．たとえば，$\{0, 1, \ldots, m-1\}$ や $\{-2, -1, 0, \ldots, m-3\}$ は完全代表系．特に，完全代表系と $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ には全単射 (1 対 1 の対応) がある：

$$\{0, 1, \ldots, m-1\} \longrightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \qquad a \mapsto [a]$$

**定義 [2](共役類)．** 群 $G$ の元 $a, b \in G$ に対して，

$$a \sim b \iff \exists \tau \in G \text{ s.t. } b = \tau a \tau^{-1}$$

とすれば，$\sim$ は同値関係となる．($\leftarrow$ 各自示す) このとき，$\sim$ による同値類を**共役類** (conjugacy class) といい，$a$ と $b$ は**共役** (conjugate) という．

**定義 (不変量)．** $X, Y$ を集合，$\sim$ を $X$ 上の同値関係とする．このとき，写像 $\pi : X \to Y$ が，任意の $x, y \in X$ に対して，$x \sim y \Rightarrow \pi(x) = \pi(y)$ をみたすとき，$\pi$ を $\sim$ に関する**不変量** (invariant) と呼ぶ．さらに，いくつかの不変量 $\pi_1, \ldots, \pi_k$ に対して，$x \sim y \iff \pi_1(x) = \pi_1(y), \ldots, \pi_k(x) = \pi_k(y)$ が満たされるとき，$\pi_1, \ldots, \pi_k$ は $\sim$ に関する**完全不変量** (complete invariants) であるという．

完全不変量は同値類による類別のしくみを全て知っている!

**補題．** 巡回置換 $\sigma = (i_1 \cdots i_k) \in S_n$ と $\tau = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} \in S_n$ に対して，

$$\tau\sigma\tau^{-1} = (\tau(i_1)\ \tau(i_2)\ \cdots\ \tau(i_k)) = (j_1\ j_2\ \cdots\ j_k). \quad (\leftarrow \sigma \text{ の中身を } \tau \text{ で動かしたもの})$$

**定理 ($S_n$ の共役な元)．** (この定理は $S_n$ に対してのみ有効なので注意) $\sigma, \sigma' \in S_n$ に対して，

$\sigma$ と $\sigma'$ は共役 ($\sigma \sim \sigma'$) $\iff$ $\sigma$ と $\sigma'$ のサイクル分解は同じ形． ($\leftarrow$ サイクル分解は p.4 参照)

$\because$ $\sigma = (i_1 \cdots i_k) \cdots (l_1 \cdots l_s)$ とする．
($\Longrightarrow$) $\sigma' = \tau\sigma\tau^{-1}$ のとき，$\sigma' = (\tau(i_1) \cdots \tau(i_k)) \cdots (\tau(l_1) \cdots \tau(l_s))$ は $\sigma$ と同じ形のサイクル分解．
($\Longleftarrow$) $\sigma' = (i'_1 \cdots i'_k) \cdots (l'_1 \cdots l'_s)$ と $\tau = \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k & \cdots & l_1 & \cdots & l_s \\ i'_1 & \cdots & i'_k & \cdots & l'_1 & \cdots & l'_s \end{pmatrix}$ に対して，$\sigma' = \tau\sigma\tau^{-1}$．

サイクル分解の型は $S_n$ の元の共役に関する完全不変量である (!)

**例 [3]($S_3$，$S_4$ の共役類)．**

- $S_3$ の共役類による類別は，

$$S_3 = \{(1)\} \cup \{(1\,2), (1\,3), (2\,3)\} \cup \{(1\,2\,3), (1\,3\,2)\} = [(1)] \cup [(1\,2)] \cup [(1\,2\,3)].$$

それぞれの共役類の位数を等式で表わしたものを**類等式** (class equation) という．$S_3$ の類等式は

$$6 = 1 + 3 + 2.$$

- $S_4$ の共役類による類別と類等式は

$$S_4 = [(1)] \cup [(1\,2)] \cup [(1\,2\,3)] \cup [(1\,2)(3\,4)] \cup [(1\,2\,3\,4)],$$

$$24 = 1 + 6 + 8 + 3 + 6.$$

1 つの類に多くの元が入っている事と群の非可換性の強さには関係がある事を群論で学ぶ．
$G$ は位数 $n$ の**可換群** $\iff$ $a \in G$ の共役は $a$ のみ $\iff$ 各共役類は 1 つの元からなる
$\iff$ $G$ の共役類は $n$ 個ある $\iff$ $G$ の類等式は $n = 1 + 1 + \cdots + 1$ ($n$ 個)

**定義 (行列の相似)．** 行列 $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) = \{C \in M_n(\mathbb{C}) \mid \det(C) \neq 0\}$ が共役

$$A \sim B \iff \exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \text{ s.t. } B = P^{-1}AP$$

であるとき，$A$ と $B$ は**相似**という．特に，$A$ が対角行列と相似のとき，$A$ は**対角化可能**という．

**例 ($\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の共役類)．** 群 $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ での共役 (相似) を考える．
例えば，$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ と $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in G$ は相似 $(A \sim B)$ である．実際，$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対して，$B = P^{-1}AP$ を満たしている．($\leftarrow Q := P^{-1}$ に対し，$B = QAQ^{-1}$, $A = Q^{-1}BQ$ でもある)

> 行列 $A$, $B$ が相似であること $(A \sim B)$ は，$P$ を具体的に見つけることにより，示せる．
> しかし，**相似でない ($P$ が存在しない) こと ($A \not\sim B$) はどのようにしたら示せるか？**

**補題 [4]．** 行列 $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ に対して，
(1) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$,　(2) $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.　($\leftarrow$ 各自示す)

**命題 [5]．** 以下の写像 det, tr は行列の相似 $\sim$ に関する不変量である:
(1) $\det : \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^{\times},\ A \mapsto \det(A)$,　(2) $\mathrm{tr} : \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C},\ A \mapsto \mathrm{tr}(A)$.

$\because$ 補題 [4] より，$\det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1})\det(A)\det(P) = \frac{1}{\det(P)}\det(A)\det(P) = \det(A)$,
$\mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}((P^{-1}A)P) = \mathrm{tr}(P(P^{-1}A)) = \mathrm{tr}((PP^{-1})A)) = \mathrm{tr}(A)$. ($\leftarrow$ 補題 [4] と結合法則)

• 不変量 (det, tr) を用いれば，相似でないことが判定できる：($\leftarrow$ 不変量の定義の対偶を考える)

$$\boxed{(1)\ \det(A) \neq \det(B) \Longrightarrow A \not\sim B, \qquad (2)\ \mathrm{tr}(A) \neq \mathrm{tr}(B) \Longrightarrow A \not\sim B.}$$

**例 (不変量を用いた非同値判定１)．**
次の行列 $A$, $B$ は相似ではない．すなわち，$B = P^{-1}AP$ なる正則行列 $P$ は存在しない：

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$\det A = 6 \neq \det B = -6$，または，$\mathrm{tr}A = 6 \neq \mathrm{tr}B = 4$ より分かる．すなわち，$A$ の対角化を求める問題で，もし求めた答えが $B$ だったら，**即座に間違っていることに気づかなくてはならない**．($\leftarrow$ ちなみに，$B$ は何らかのケアレスミスで，本当は $A \sim C$ である)

**例 [5](不変量を用いた非同値判定２)．** しかし，2 つの不変量 det, tr は**完全不変量ではない**．($\leftarrow$ $A \sim B$ を完全に判定するには不十分である)．例えば，$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対して，$\det A = \det B = 1$, $\mathrm{tr}A = \mathrm{tr}B = 2$ であるが，$A \not\sim B$ である．($\leftarrow$ 各自：$PB = AP$ とすると矛盾)

• さらに，行列 $A$ の相似 $\sim$ に関する重要な不変量として，**階数** (rank)，**固有値** (Eigenvalue)，**特性多項式 (固有多項式)**(characteristic polynomial)，**最小多項式** (minimal polynomial)，$xI - A$ の**単因子** (elementary divisor)，**ジョルダン標準形** (Jordan normal (canonical) form) などがある．

> 行列 $A$ は対角化可能 ($\sim$ の同値類に対角行列が入っている) か，**対角化できない $A$ の同値類の代表元として，どのような対角行列に近い行列が取れるか (ジョルダン標準形)** は，(基底変換に関連する) 線形代数の主題の 1 つである．

• 最後に，**線型代数の (1 つの) 目標 (相似 $\sim$ に関する完全不変量)** を記しておく：

$$\boxed{A \sim B \iff xI - A \text{ と } xI - B \text{ の単因子は一致} \iff A \text{ と } B \text{ のジョルダン標準形は一致}}$$