

問 [1](置換の結合法則) 3つの置換 $\sigma, \tau, \rho \in S_n$ に対して, つねに

$$(\sigma \circ \tau) \circ \rho = \sigma \circ (\tau \circ \rho)$$

が成り立つだろうか? この様な法則が成り立つとき, 積 \circ に関して結合法則が成り立つという.

例 (結合法則). 実数 $a, b, c \in \mathbb{R}$ は, 通常の加法 (+), 乗法 (\times) に関して結合法則を満たす:

$$(a + b) + c = a + (b + c), \quad (a \times b) \times c = a \times (b \times c).$$

しかし, 実は結合法則を満たさない積 \circ が存在する! この場合には以下を区別しなければならない!

$$(a \circ b) \circ c \neq a \circ (b \circ c),$$

$$((a \circ b) \circ c) \circ d \neq (a \circ (b \circ c)) \circ d \neq a \circ ((b \circ c) \circ d) \neq a \circ (b \circ (c \circ d)) \neq (a \circ b) \circ (c \circ d).$$

(当然) 括弧を省略することは許されない(泣).

そもそも積とは何だろうか? 置換の積は, 数ではなく集合の2つの元に対して積が定義されていた. 数の積, 置換の積などを一般化した概念として二項演算がある. また, 上の問(置換の結合法則)を考える上でも(数学では)集合と写像の概念が必須である.

• 「関数」の概念を一般の集合 (=ものの集まり, 数の集まりである必要はない) 上に一般化することで「写像」の概念が得られる.

定義 (写像)(参 p.18). X, Y を空でない集合とする. X の任意の元 (=要素) x に Y の元 $y = f(x)$ を対応させる規則 (ルール) f のことを X から Y への写像 (map) といい, $f : X \rightarrow Y$ とかく. 特に, 各元の対応を表すときには,

$$f : X \rightarrow Y,$$

$$\cup \quad \cup$$

$$f : X \ni x \mapsto y = f(x) \in Y,$$

$$f : X \rightarrow Y, x \mapsto y = f(x)$$

$$x \mapsto y = f(x),$$

等と書く. 特に, X, Y が \mathbb{R} や \mathbb{C} など数の場合には関数と呼ぶ. (\leftarrow 二種類の矢印 (\rightarrow, \mapsto), コロン (:)) の使い方には十分に注意すること. 例えば, コロン (:)) をセミコロン (;) にしてはいけない.)

定義 (合成写像)(参 p.19). 2つの写像 $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$ に対して, X の元 x を f で移した値 $f(x) \in Y$ を, さらに g で $g(f(x)) \in Z$ につづす写像を f と g の合成写像 (composite map) といい $g \circ f$ で表す: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. すなわち,

$$g \circ f : X \ni x \mapsto g(f(x)) \in Z.$$

例 (合成写像). 3つの集合 $X = \{a, b, c\}, Y = \{1, 2, 3\}, Z = \{\yen, 0\}$ に対して, 写像 $f : X \rightarrow Y$ と $g : Y \rightarrow Z$ を

$$f(a) = 2, f(b) = 3, f(c) = 2, \quad g(1) = \yen, g(2) = 0, g(3) = 0$$

と定義する. このとき, 合成写像 $g \circ f$ は $g \circ f : X \rightarrow Z, a \mapsto 0, b \mapsto 0, c \mapsto 0$ で与えられる.

命題 (写像の合成の結合法則). 写像 $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z, h : Z \rightarrow W$ に対して, 次が成り立つ:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) : X \rightarrow W.$$

• 写像 $X \rightarrow Y$ が分かりやすいのは, 「 X の別々の元はそれぞれ Y の別々の元に移る」場合や「 Y の全ての元は X から移ってくる」場合で, そのような(直感的な)イメージは, 数学では次のように定義(表現)する (\leftarrow イメージでは数学(証明)はできないので, 厳密な定義が必要!):

定義 (単射)(参 p.19) . 写像 $f : X \rightarrow Y$ が単射 (injective) であるとは, 任意の $x_1, x_2 \in X$ に対して, $x_1 \neq x_2$ ならば $f(x_1) \neq f(x_2)$ が成り立つことである .

• 対偶をとれば, 写像 $f : X \rightarrow Y$ が単射であるとは, 任意の $x_1, x_2 \in X$ に対して, 「 $f(x_1) = f(x_2)$ ならば $x_1 = x_2$ 」が成り立つこととも言える .

定義 (全射)(参 p.19) . 写像 $f : X \rightarrow Y$ が全射 (surjective) であるとは, 任意の $y \in Y$ に対して, $f(x) = y$ となる $x \in X$ が存在することである .

定義 (全単射)(参 p.19) . 写像 $f : X \rightarrow Y$ が全単射であるとは, 全射かつ単射であることである .

定義 (逆写像)(参 p.21) . 写像 $f : X \rightarrow Y$ を全単射とする . このとき, (全射より) 任意の $y \in Y$ に対して, ある $x \in X$ が存在して $f(x) = y$ を満たし, またそのような $x \in X$ は (単射より) 一意的 (= 唯一つ) に定まる . この $y \in Y$ に対して, $x \in X$ を対応させる写像を f の逆写像 (inverse map) といい f^{-1} で表す . すなわち, $f^{-1} : Y \rightarrow X, f(x) = y \mapsto x$ である .

定義 (二項演算) . 集合 X に対して, 写像 $f : X \times X \rightarrow X, (a, b) \mapsto a \circ b := f(a, b)$ を X 上の二項演算 (または演算) といい, $a \circ b := f(a, b)$ を a と b の積という . この \circ を単に二項演算と呼ぶこともある . 集合 X 上に二項演算 \circ が与えられている (= 定義されている) ことを (X, \circ) と表す .

例 (二項演算) . (i) n 次対称群 S_n と置換の積 $\sigma \circ \tau$ に対して, \circ は S_n 上の二項演算である : (S_n, \circ) .
(ii) 通常に加減乗除に対して, $(\mathbb{Q}, +), (\mathbb{Q}, -), (\mathbb{Q}, \times), (\mathbb{Q}, \div)$ は二項演算が与えられた集合の例である . しかし, \mathbb{N} に対する減法と除法

$$- : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad (a, b) \mapsto a - b, \quad \div : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad (a, b) \mapsto \frac{a}{b}$$

は二項演算ではないことに注意すること . (← なぜか考える !)

命題 (置換の定義の再考) . n 文字 $I_n := \{1, 2, \dots, n\}$ の置換を 1 つ与えることは, I_n から I_n への全単射である写像を 1 つ与えると同じである . よって I_n の置換全体のなす集合 n 次対称群 S_n は

$$S_n = \left\{ \sigma : I_n \rightarrow I_n \mid \sigma \text{ は全単射} \right\} \left(= \left\{ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ i_1 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \mid \{i_1, \dots, i_n\} \text{ は } \{1, \dots, n\} \text{ の並べ替え} \right\} \right)$$

と表せ, 置換の積 $\sigma \circ \tau$ (= S_n 上の二項演算) は合成写像 $(\sigma \circ \tau)(i) = \sigma(\tau(i)), i \in I_n$ に他ならない .

演習問題 (小テスト・中間テストの予想問題) ([1] は p.7)

- [2] (単射でない) 写像 $f : X \rightarrow Y$ が単射でないということは, どのようなことか? ある写像が単射でないことを示すには, 何を示す必要があるか? (ヒント「ある ~ が存在して」を用いる)
- [3] (全射でない) 写像 $f : X \rightarrow Y$ が全射でないということは, どのようなことか? ある写像が全射でないことを示すには, 何を示す必要があるか? (ヒント「ある ~ が存在して」を用いる)
- [4] 3 文字の集合 $I_3 := \{1, 2, 3\}$ に対して, 写像 $\sigma : I_3 \rightarrow I_3$ を $\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 3, \sigma(3) = \boxed{?}$ として定義する . この写像が単射, 全射, 全単射となる為にはそれぞれ $\boxed{?}$ をどう取ればよいか?
- [5] $X = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ のそれぞれに対して, 次の写像は単射, 全射, 全単射かどうかを判定せよ .
(i) $f : X \rightarrow X, x \mapsto 3x$, (ii) $f : X \rightarrow X, x \mapsto x^3$.
- [6] (i) 全単射 $f : X \rightarrow Y$ の逆写像 f^{-1} に対して, $f^{-1} \circ f = \text{id}_X, f \circ f^{-1} = \text{id}_Y$ が成り立つことを確かめよ . 但し, $\text{id}_X : X \rightarrow X$ は任意の $x \in X$ に対して $\text{id}_X(x) = x$ なる写像, すなわち x に x そのものを対応させる写像であり, X の恒等写像とよばれる (id_Y についても同様) .
(ii) 写像 $f : X \rightarrow Y$ と $g : Y \rightarrow X$ が $g \circ f = \text{id}_X$ をみたすとき, f は単射かつ g は全射を示せ . これを用いて, $g \circ f = \text{id}_X$ かつ $f \circ g = \text{id}_Y$ ならば f と g は全単射で $g = f^{-1}$ を示せ .