復習． $(S_n, \circ)$ とは，置換 $\sigma, \tau \in S_n$ に対して，置換の合成 (積) $\sigma \circ \tau \in S_n$ が定義された集合のこと．

定理 (n 次対称群 S_n の性質)． $(S_n, \circ)$ に対して，次が成り立つ：
(i) 積 $\circ$ は**結合法則**を満たす：任意の $\sigma, \tau, \rho \in S_n$ に対して，$(\sigma \circ \tau) \circ \rho = \sigma \circ (\tau \circ \rho)$ が成り立つ．
(ii) 置換 $\tau = (1) \in S_n$ は，任意の置換 $\sigma \in S_n$ にかけても相手を変化させない：

任意の $\sigma \in S_n$ に対して，$\tau \circ \sigma = \sigma \circ \tau = \sigma$ が成り立つ．—— ①

置換 $\tau = (1)$ のことを**恒等置換**と呼ぶ．($\leftarrow$ 恒等写像に対応している!)
(iii) 任意の置換 $\sigma \in S_n$ に対して，

$\sigma \circ \sigma' = \sigma' \circ \sigma = (1)$ を満たす置換 $\sigma' \in S_n$ が存在する．—— ②

この σ' を σ **の逆置換**とよび，σ^{-1} と表す．($\leftarrow$ 逆写像に対応している)

命題 (恒等置換，逆置換の一意性)． ($\leftarrow$ 「一意性」「一意的」については教科書 p.35 参照)
(i) ①を満たすような置換 $\tau \in S_n$ は $\tau = (1)$ のみである，
(ii) $\sigma \in S_n$ に対して，②を満たすような置換 σ' は一意的に定まる．

より感覚と合致している証明，及び，一般的 (理論的) で今後も使う証明 をそれぞれ与える．

証明１． (i) $\tau \neq (1)$ とすれば，異なる２つの整数 $i \neq j \in \mathbb{Z}$ が存在して $\tau(i) = j$ となる．互換 $(i\,j) \in S_n$ に対して，$(i\,j) \circ \tau$ は i を動かさないので，$(i\,j) \circ \tau \neq (i\,j)$ であり，τ は ①を満たさない．
(ii) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$ とすれば，σ の逆置換は $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$ であり，これ以外には存在しない．なぜなら，下の段の k 番目が k 以外のとき $\sigma \circ \sigma^{-1}(k) \neq k$ となるからである．

証明２． (i) ２つの置換 $\tau, \tau' \in S_n$ が ①を満たすと仮定すると，$\tau = \tau'$ が導かれることを示す．
仮定より，τ は $\sigma = \tau'$ に対して $\tau \circ \tau' = \tau' \circ \tau = \tau'$ を満たす．また，τ' は $\sigma = \tau$ に対して $\tau' \circ \tau = \tau \circ \tau' = \tau$ を満たす．よって，$\tau = \tau \circ \tau' = \tau'$ が導かれた．
(ii) ２つの置換 $\sigma', \sigma'' \in S_n$ が ②を満たすと仮定すると，$\sigma' = \sigma''$ が導かれることを示す．
仮定より，σ', σ'' はそれぞれ $\sigma \in S_n$ に対して，$\sigma \circ \sigma' = \sigma' \circ \sigma = (1)$，$\sigma \circ \sigma'' = \sigma'' \circ \sigma = (1)$ を満たす．ここで，$(S_n, \circ)$ の積 $\circ$ が結合法則を満たすことに注意すれば (上記定理 (i))，$\sigma' = \sigma' \circ (1) = \sigma' \circ (\sigma \circ \sigma'') = (\sigma' \circ \sigma) \circ \sigma'' = (1) \circ \sigma'' = \sigma''$ が得られる．

演習問題の解答

[**1**] (p.11)

• S_3 の演算表の各行各列には (1) が必ず出現し，また丁度一回しか現われない．

∵ 任意の置換 $\sigma \in S_3$ に対して，その逆置換 σ^{-1} が一意的に存在するから．

• S_3 の演算表の各行各列には，同じ元が２度は現われず，また全ての元が現われる．

∵ これは集合と写像の言葉 (**全射，単射**) を使えば次のように言える．

$S_3 = \{a_1, \ldots, a_6\}$ と $\sigma \in S_3$ に対して，$\sigma S_3 := \{\sigma \circ a_1, \ldots, \sigma \circ a_6\}$ とおく．すると，σS_3 は σ が左端にある行に出現する置換全体の集合である．また，積 $\circ$ の定義から，σS_3 は S_3 の部分集合である ($\sigma S_3 \subset S_3$)．上記の主張は，写像 $f : S_3 \to \sigma S_3$, $a_i \mapsto \sigma \circ a_i$ $(1 \leq i \leq 6)$ が単射であると言い換えられる ($\leftarrow$ 各自，なぜかを必ず考えること!)．f の単射性は $f(a_i) = f(a_j) \Rightarrow \sigma \circ a_i = \sigma \circ a_j \Rightarrow \sigma^{-1} \circ (\sigma \circ a_i) = \sigma^{-1} \circ (\sigma \circ a_j) \Rightarrow (\sigma^{-1} \circ \sigma) \circ a_i = (\sigma^{-1} \circ \sigma) \circ a_j \Rightarrow (1) \circ a_i = (1) \circ a_j \Rightarrow a_i = a_j$ によって示される．($\leftarrow$ ここで，**結合法則，恒等置換・逆置換の存在**をフルに使っている (!))
よって，$\sigma S_3 = S_3$ であり，写像 f は S_3 から S_3 への**全単射**を与えていることが分かった．

• n 次対称群 S_n，部分群 X_i の演算表についても各行各列に全ての元が１回づつ現われる．

∵ 各自，なぜなのかを (上の証明をヒントにして) 必ず考えること (!)．
($\leftarrow$ ヒント X_i **の性質 (結合法則，恒等置換・逆置換の存在**とその**一意性**)．

• **同型な群**は，X_3 と X_4，X_5 と X_7，X_6 と X_8 である．

数学的帰納法 (Mathematical induction)**.** 自然数 $n \in \mathbb{N}$ に関する命題 $P(n)$ に対して，
(i) 命題 $P(1)$ は成立する，
(ii) 命題 $P(n)$ が成立すると仮定すれば，命題 $P(n+1)$ は成立する，
の 2 つの条件が示されれば，命題 $P(n)$ は任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して成立する．

• 数学的帰納法にはいくつかの派生した形がある．例えば，1 以外から始まるもの，(i) の代わりに
(i′) 命題 $P(1), \ldots, P(n)$ が成立する，
を仮定するもの，$n, m \in \mathbb{N}$ に関する命題 $P(m, n)$ について m, n を 2 次元で動かす数学的帰納法もある．また，2 つの命題 $P(n)$ と $Q(n)$ を平行して扱う数学的帰納法も存在する．

鳩の巣原理 (Pigeonhole principle)**.** 鳩の巣原理とは『整数 $n > m$ に対して，n 羽の鳩が m 個の巣に入っているとすると，ある巣には 2 羽以上の鳩が入っている』という原理のことを指す．

• 鳩の巣原理は非常に単純な原理であるが，組み合わせ論をはじめとして数学の多くの分野の証明で威力を発揮する．必ずどの巣かには，2 羽以上入っているのであるが，具体的にどの巣に入っているかは一切分からない，という面白さ (難しさ) を持ち合わせている．

友愛数, 完全数 (Amicable number, Perfect number)**.**
(1) 異なる 2 つの自然数の組 $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ は，a の自分自身を除いた約数の和が b となり，かつ b の自分自身を除いた約数の和が a となるとき**友愛数**であるという．
(2) 自然数 $a \in \mathbb{N}$ は自分自身を除いた約数の和が a そのものと一致するとき，**完全数**という．

例 (友愛数, 完全数). (1) 友愛数の例として，$(220, 284)$, $(1184, 1210)$, $(2620, 2924)$, $(5020, 5564)$, $(6232, 6368)$, $(10744, 10856)$ などがある．
(2) 完全数の例として，6, 28, 496, 8128, 33550336, 8589869056 などがある．しかし，友愛数が無限にあるか，偶数の完全数が無限にあるか，奇数の完全数が 1 つでもあるかは知られていない．

未定係数法 (Metheod of undetermined coefficients)**.** 係数 $a_1, \ldots, a_k$ を用いたある形で等式が成立する事を予想し，いくつかの条件から係数 $a_1, \ldots, a_k$ を決定する方法．

例 (2 乗和の公式). $\sum_{k=1}^{n} k^2$ が n の 3 次以下の公式で書けると仮定する．
すなわち，$\sum_{k=1}^{n} k^2 = an^3 + bn^2 + cn + d$, $(a, b, c, d \in \mathbb{Q})$ と書けると仮定する．$n = 1, 2, 3, 4$ を代入し，$1 = a + b + c + d$, $5 = 8a + 4b + 2c + d$, $14 = 27a + 9b + 3c + d$, $30 = 64a + 16b + 4c + a$ を得る．これを解けば，$(a, b, c, d) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, 0)$ を得る．すなわち，3 次以下の公式が存在すれば，$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ でなくてはならない．

べき乗和の公式. $s, n \in \mathbb{N}$ を自然数とする．n 個の s 乗和

$$F_s(n) := \sum_{k=1}^{n} k^s \quad \text{に対して，} \quad F_s(n) = \frac{1}{s+1}\left\{(n+1)^{s+1} - 1 - \sum_{j=0}^{s-1} \binom{s+1}{j} F_j(n)\right\}$$

が成り立つ．

ベルヌーイ数 (Bernoulli numbers)**.** ベルヌーイ数 B_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ を

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k = n + 1$$

によって定める．ベルヌーイ数 B_n は小さい方から以下の様になる：

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
B_n	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0												

演習問題 (小テスト・中間テストの予想問題)

[1] 二項定理を数学的帰納法によって証明せよ．すなわち，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，以下が成り立つことを示せ：

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

[2] 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，以下が成り立つことを数学的帰納法を用いて示せ.

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

[3] (2 乗和, 3 乗和の公式) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，以下を数学的帰納法によって示せ.

$$\text{(i)} \ \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad \text{(ii)} \ \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

[4] (s 乗和の公式) 以下の s 乗和 $(s = 4, 5, 6)$ を与える公式を予想し，証明せよ.

$$\text{(i)} \ \sum_{k=1}^{n} k^4, \qquad \text{(ii)} \ \sum_{k=1}^{n} k^5, \qquad \text{(iii)} \ \sum_{k=1}^{n} k^6.$$

[5] $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ をフィボナッチ数列とする．以下を数学的帰納法によって示せ.
(i) $F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$,
(ii) $F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$.

[6] $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ をフィボナッチ数列とする.
数学的帰納法により，以下の命題 $P(n)$, $Q(n)$ が，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して成り立つことを示せ.
($\leftarrow$ ヒント：$P(n)$ と $Q(n)$ を仮定して，$P(n+1)$ と $Q(n+1)$ を示す．)

$P(n) : F_{n+1}^2 + F_n^2 = F_{2n+1}$,
$Q(n) : 2F_{n+1}F_n + F_{n+1}^2 = F_{2n+2}$.

[7] $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ をフィボナッチ数列とし，

$$x_n := F_n F_{n+3}, \quad y_n := 2F_{n+1}F_{n+2}, \quad z_n := F_{2n+3}$$

とおく．このとき，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $(x_n, y_n, z_n) \in \mathbb{N}^3$ はピタゴラスの定理を満たす，すなわち

$$x_n^2 + y_n^2 = z_n^2$$

を満たすことを示せ．これより，$x^2 + y^2 = z^2$ を満たす $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ は無限にあることを示せ.
($\leftarrow$ ヒント **問** [5], [6] は自由に使ってよい)

参考文献

[1] ベルヌーイ数とゼータ関数, 荒川 恒男, 金子 昌信, 伊吹山 知義 (著), 牧野書店 (2001).

[2] フィボナッチ数の小宇宙ーフィボナッチ数、リュカ数、黄金分割, 中村 滋 (著), 日本評論社; 改訂版版 (2008).

$$\boxed{s\text{ 乗和の公式 } F_s(n) := \sum_{k=1}^{n} k^s}$$

$$
\begin{aligned}
s &= 1, & F_1(n) &= \frac{1}{2}n(n+1) \\
s &= 2, & F_2(n) &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \\
s &= 3, & F_3(n) &= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 \\
s &= 4, & F_4(n) &= \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)\left(3n^2+3n-1\right) \\
s &= 5, & F_5(n) &= \frac{1}{12}n^2(n+1)^2\left(2n^2+2n-1\right) \\
s &= 6, & F_6(n) &= \frac{1}{42}n(n+1)(2n+1)\left(3n^4+6n^3-3n+1\right) \\
s &= 7, & F_7(n) &= \frac{1}{24}n^2(n+1)^2\left(3n^4+6n^3-n^2-4n+2\right) \\
s &= 8, & F_8(n) &= \frac{1}{90}n(n+1)(2n+1)\left(5n^6+15n^5+5n^4-15n^3-n^2+9n-3\right) \\
s &= 9, & F_9(n) &= \frac{1}{20}n^2(n+1)^2\left(n^2+n-1\right)\left(2n^4+4n^3-n^2-3n+3\right) \\
s &= 10, & F_{10}(n) &= \frac{1}{66}n(n+1)(2n+1)\left(n^2+n-1\right)\left(3n^6+9n^5+2n^4-11n^3+3n^2+10n-5\right) \\
s &= 11, & F_{11}(n) &= \frac{1}{24}n^2(n+1)^2\left(2n^8+8n^7+4n^6-16n^5-5n^4+26n^3-3n^2-20n+10\right) \\
s &= 12, & F_{12}(n) &= \frac{1}{2730}n(n+1)(2n+1)\left(105n^{10}+525n^9+525n^8-1050n^7-1190n^6+2310n^5+1420n^4-3285n^3-287n^2+2073n-691\right) \\
s &= 13, & F_{13}(n) &= \frac{1}{420}n^2(n+1)^2\left(30n^{10}+150n^9+125n^8-400n^7-326n^6+1052n^5+367n^4-1786n^3+202n^2+1382n-691\right) \\
s &= 14, & F_{14}(n) &= \frac{1}{90}n(n+1)(2n+1)\left(3n^{12}+18n^{11}+24n^{10}-45n^9-81n^8+144n^7+182n^6-345n^5-217n^4+498n^3+44n^2-315n+105\right) \\
s &= 15, & F_{15}(n) &= \frac{1}{48}n^2(n+1)^2\left(3n^{12}+18n^{11}+21n^{10}-60n^9-83n^8+226n^7+203n^6-632n^5-226n^4+1084n^3-122n^2-840n+420\right)
\end{aligned}
$$

• 集合 X の元 $x \in X$ に対する命題 $P(x)$ の**否定**を $Q(x)$ とする．このとき，否定には次のような関係がある ($\leftarrow P(x), Q(x)$ の中にくり返し「任意の」「存在する」が出てくることもあるので注意)

ある $x \in X$ が存在して，$\boxed{P(x) = Q(x) \text{ の否定}}$ が成り立つ．

否定↑　　↓**否定**

任意の $x \in X$ に対して，$\boxed{P(x) \text{ の否定} = Q(x)}$ が成り立つ．

定義 ((狭義) 単調増加)． 実数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が**単調増加 (狭義単調増加)** であるとは，
任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，$a_n \leq a_{n+1}$ ($a_n < a_{n+1}$) が成り立つこと．

[1] 「実数列が単調増加である」の**否定**を書け．すなわち，実数列が**単調増加でない**とは？

定義 (上に (下に) 有界)． 実数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が**上に (下に) 有界**であるとは，
ある実数 $M \in \mathbb{R}$ が存在して，任意の自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して，$a_n \leq M$ ($a_n \geq M$) が成り立つこと．

[2] 「実数列が上に有界である」の**否定**を書け．すなわち，実数列が**上に有界でない**とは？

実数列が $\alpha \in \mathbb{R}$ に収束するとは,『どんどん』$\alpha \in \mathbb{R}$ に近づいていくという『イメージ』のことではなく，次の定義を満たすことである：

定義 (実数列の収束)． 実数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $\alpha \in \mathbb{R}$ **に収束する**とは，
任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して，
任意の $n > N$ なる $n \in \mathbb{N}$ に対して $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つこと．

[3] 「実数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $\alpha \in \mathbb{R}$ に収束する」の**否定**を書け．
すなわち，実数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $\alpha \in \mathbb{R}$ **に収束しない**とは？

実数の公理 (参考書 p.52)．**「単調増加かつ上に有界な実数列は収束する」**．

[4] (1) 実数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ は単調増加かつ上に有界であることを示せ．
(2) 実数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ は単調増加かつ上に有界であることを示せ．($\leftarrow$ (1) を使う)

実数値関数 f が連続であるとは，グラフを書いたら『つながっている』という『イメージ』のことではなく，次の定義を満たすことである：($\leftarrow$ そもそも，必ずグラフが書けるわけではない (!))

定義 (連続)(参考書 p.70)． $X \subset \mathbb{R}$ とする．実数値関数 $f : X \to \mathbb{R}$ が**点** $\alpha \in X$ **で連続**であるとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在して，任意の $x \in X$ に対して，$|x - \alpha| < \delta$ ならば $|f(x) - f(\alpha)| < \varepsilon$ が成り立つこと．また，f が X の各点 $\alpha \in X$ で連続のとき，X **上連続**という．

[5] 「実数値関数 f が点 $\alpha \in X$ で連続である」の**否定**を書け．すなわち，実数値関数 f が**点** $\alpha \in X$ **で連続でない**とは？また，実数値関数が X **上で連続でない**とは？

参考文献

[1] なっとくするオイラーとフェルマー, 小林 昭七 (著), 講談社 (2003).

[2] イプシロン–デルタ (数学ワンポイント双書 20), 田島 一郎 (著), 128 ページ, 共立出版 (1978).

[3] 解析入門 (岩波全書 325), 田島 一郎 (著), 293 ページ, 岩波書店 (1981).

[4] 解析入門 I, 小平 邦彦 (著), 251 ページ, 岩波書店; 軽装版 (2003).

[5] 解析入門 I, 杉浦 光夫 (著), 428 ページ, 東京大学出版会 (1980).