

代数序論A (第12回・2011/07/28) 小テスト

学籍番号		氏名	
------	--	----	--

[1] (同値関係) 集合 X の2つの元の間定義された関係 \sim が、次の3つの条件を満たすとき、この関係 \sim を同値関係という。

(1) 反射律 $x \sim x \quad (\forall x \in X)$,

(2) 対称律 $(\forall x, y \in X)$,

(3) 推移律 $(\forall x, y, z \in X)$.

[2] (同値類) 同値関係 \sim が定義された集合 X の各元 $a \in X$ に対して、

$C(a) := \left\{ \quad \right\}$ を a を含む同値類という。 $C(a)$ を または とも表す .

[3] (類別; クラス分け) 集合 X に対し、次の3条件を満たす X の部分集合 $C_i, (i \in I)$ の集まりを X の類別またはクラス分けという:

(1) $C_i \neq \emptyset$, (2) $X = \bigcup_{i \in I} C_i$, (3) .

定理 . 集合 X に同値関係 \sim を定めると、同値類 $C(a)$ によって X の類別が得られる。

[4] 集合 X に同値関係 \sim が定まっているとする。

X の同値関係 \sim による同値類の集まり $\{C(a) \mid a \in X\}$ を、 集合といい、

$$X/\sim := \{C(a) \mid a \in X\} \text{ と表す.}$$

[5] (法 m に関して合同) $m \in \mathbb{N}$ とする。

整数 $a, b \in \mathbb{Z}$ が法 m に関して合同である ($a \equiv b \pmod{m}$) とは、次を満たすこと:

$$a \equiv b \pmod{m} \iff \left\{ \quad \right\}$$

[6] \mathbb{Z} における、法 m に関して合同という関係 (\equiv) は、同値関係となる。また、この同値関係 (\equiv) による $\mathbb{Z}/\equiv (= \mathbb{Z}/\sim \text{ のこと})$ を $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ とかく。例えば $m=5$ のとき、

$$a + 5\mathbb{Z} := \{a + 5n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

と書けば、この $a + 5\mathbb{Z}$ を使って次のように書ける:(← ヒント: $\#(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) = 5, \#(a + 5\mathbb{Z}) = \infty$)

$$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \left\{ \quad \right\}$$

このときの各 (同値) 類 $a + 5\mathbb{Z}$ は法 5 に関する剰余類とも呼ばれる。

また、各 (同値) 類から代表元を1つずつとって作った集合を という。

特に、 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ とその完全代表系 $\{0, 1, \dots, m-1\}$ の間には全単射 (1対1対応) がある。

[7] 群 G の元 $a, b \in G$ に対して、

$$a \sim b \iff \exists \tau \in G \text{ s.t. } b = \tau a \tau^{-1}$$

とすれば、 \sim は同値関係となる。このとき、 \sim による同値類を 類という。