

代数序論 A (第 5 回・2011/06/09) 小テスト

学籍番号		氏名	
------	--	----	--

[1]  $X, Y$  を空でない集合とする．次の  を埋めて全射, 単射の定義を完成させよ．

但し, 「任意の  $\sim$  に対して」「 $\sim$  が存在する (して)」を用いること．

(i) (2 点) 写像  $f : X \rightarrow Y$  が全射であるとは,

ことである．

(ii) (2 点) 写像  $f : X \rightarrow Y$  が単射であるとは,

が成り立つことである．

[2] 二項演算  $\circ$  が与えられた有限集合  $X = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  に対し, その二項演算の対応を以下の様に表にしたものを,  $(X, \circ)$  の演算表と呼んだ:

$\circ$	$a_1$	$a_2$	$\dots$	$a_j$	$\dots$	$a_n$
$a_1$	$a_1 \circ a_1$	$a_1 \circ a_2$		$\vdots$		$a_1 \circ a_n$
$a_2$	$a_2 \circ a_1$	$a_2 \circ a_2$		$\vdots$		$a_2 \circ a_n$
$\vdots$				$\vdots$		$\vdots$
$a_i$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$a_i \circ a_j$		$\vdots$
$\vdots$						$\vdots$
$a_n$	$a_n \circ a_1$	$a_n \circ a_2$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$a_n \circ a_n$

3 次対称群  $S_3$  の元  $\sigma, \tau \in S_3$  には, 置換の積  $\sigma \circ \tau$  が写像の合成  $\sigma \circ \tau(i) := \sigma(\tau(i)), i \in \{1, 2, 3\}$  によって定義されていた．以下の空欄部分を埋め,  $(S_3, \circ)$  の演算表を完成させよ．但し,

$$S_3 = \{(1), a, b, c, d, e\}, \quad a = (1\ 2\ 3), \quad b = (1\ 3\ 2), \quad c = (1\ 2), \quad d = (1\ 3), \quad e = (2\ 3)$$

とし, 空欄の中には必ず  $(1), a, b, c, d, e$  のどれかを入れること．

$\circ$	$(1)$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$
$(1)$	$(1)$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$
$a$	$a$	<input style="width: 30px; height: 20px; border: 1px solid black;" type="text"/>	<input style="width: 30px; height: 20px; border: 1px solid black;" type="text"/>	$d$	$e$	$c$
$b$	$b$	<input style="width: 30px; height: 20px; border: 1px solid black;" type="text"/>	<input style="width: 30px; height: 20px; border: 1px solid black;" type="text"/>	$e$	$c$	$d$
$c$	$c$	<input style="width: 30px; height: 20px; border: 1px solid black;" type="text"/>	<input style="width: 30px; height: 20px; border: 1px solid black;" type="text"/>	$(1)$	$b$	$a$
$d$	$d$	<input style="width: 30px; height: 20px; border: 1px solid black;" type="text"/>	<input style="width: 30px; height: 20px; border: 1px solid black;" type="text"/>	<input style="width: 30px; height: 20px; border: 1px solid black;" type="text"/>	$(1)$	$b$
$e$	$e$	<input style="width: 30px; height: 20px; border: 1px solid black;" type="text"/>	<input style="width: 30px; height: 20px; border: 1px solid black;" type="text"/>	<input style="width: 30px; height: 20px; border: 1px solid black;" type="text"/>	<input style="width: 30px; height: 20px; border: 1px solid black;" type="text"/>	$(1)$

[3] 任意の置換  $\sigma \in S_n$  に対して,

$$\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = (1)$$

を満たす置換  $\sigma^{-1} \in S_n$  が存在し,  $\sigma$  の逆置換といった．例えば,  $a = (1\ 2\ 3)$  の逆置換は  $b = (1\ 3\ 2)$  であり,  $c = (1\ 2)$  の逆置換は  $c = (1\ 2)$  自身である．

さて, 問 [2] の演算表には, 各行各列に, 必ず  $(1)$  が現われる．それがなぜかを説明せよ．