代数序論Ａ（第９回・2011/07/07）小テスト

学籍番号		氏名	

[1] **(群の定義)** 空でない集合 G 上に二項演算

$$f : G \times G \longrightarrow G, \quad (a, b) \longmapsto a \circ b := f(a, b)$$

が定義され，次の３つの条件を満たすとき $(G, \circ)$ を**群** (group) という：

(G1) 結合法則 $\boxed{\quad}$

(G2) 単位元の存在 $\boxed{\quad}$

(G3) 逆元の存在 $\boxed{\quad}$

n 次対称群 S_n は (その名の通り) 群である．結合法則を満たすことは，**写像の合成** $\circ$ **が結合法則を満たす**こと (p.7) から分かる．単位元は**恒等置換** (1)，$\sigma \in S_n$ の逆元は σ の**逆置換** σ^{-1}.

[2] 群 G が $\boxed{\quad}$ を満たすとき，

G は**可換群** (commutative group) または**アーベル群** (abelian group) と呼ばれる．

[3] 群 G が加法群 $(G, +)$ の場合には，$a \in G$ の逆元は $\boxed{\quad}$ と書かれる．

また，G が乗法群 $(G, \cdot)$ の場合には，$a \in G$ の逆元は $\boxed{\quad}$ と書かれる．

[4] 群 $(G, \circ)$ の濃度 (有限のときは，位数，すなわち元の個数) を $|G|$ 又は $\#G$ で表す．

群 G は，$\#G < \infty$ のとき $\boxed{\quad}$，$\#G = \infty$ のとき**無限群**と呼ばれる．

[5] 群 G の単位元を 1 とかくと，(部分群の定義から) G **自身と** $\{1\}$ **は** G **の部分群**となる．この２つの部分群を，**自明な部分群**という．ちなみに，群 $\{1\}$ は $\boxed{\quad}$ と呼ばれる．

[6] ２つの有限群 $(G, \circ)$, $(G', \star)$ は，元の名前と順番を適当に変更すれば，群表 (演算表) が同じ形にできるとき，$\boxed{\quad}$ (英語では isomorphic) といい，$G \cong G'$ と表す．

[7] $G_1 = \{(1), a, b, c\}$, $G_2 = \{(1), b, d, e\}$, $G_3 = \{(1), f, b, g\}$,

$a = (1\,3)$, $b = (1\,3)(2\,4)$, $c = (2\,4)$, $d = (1\,2)(3\,4)$, $e = (1\,4)(2\,3)$, $f = (1\,2\,3\,4)$, $g = (1\,4\,3\,2)$,

とすれば，$(G_1, \circ)$, $(G_2, \circ)$, $(G_3, \circ)$ は群であり，$G_2 \cong \boxed{\quad}$ である (G_2 以外を答える)．