問 [1](置換の結合法則) 3つの置換 $\sigma,\ \tau,\ \rho \in S_n$ に対して，つねに

$$(\sigma \circ \tau) \circ \rho = \sigma \circ (\tau \circ \rho)$$

が成り立つだろうか？この様な法則が成り立つとき，積 $\circ$ に関して**結合法則**が成り立つという．

例 (結合法則)． 実数 $a, b, c \in \mathbb{R}$ は，通常の加法 $(+)$，乗法 $(\times)$ に関して結合法則を満たす：

$$(a+b)+c = a+(b+c), \quad (a \times b) \times c = a \times (b \times c).$$

しかし，実は結合法則を満たさない積 $\circ$ が存在する！この場合には以下を区別しなければならない！

$$(a \circ b) \circ c \neq a \circ (b \circ c),$$
$$((a \circ b) \circ c) \circ d \neq (a \circ (b \circ c)) \circ d \neq a \circ ((b \circ c) \circ d) \neq a \circ (b \circ (c \circ d)) \neq (a \circ b) \circ (c \circ d).$$

(当然) 括弧を省略することは許されない (泣).

そもそも積とは何だろうか？置換の積は，数ではなく集合の2つの元に対して積が定義されていた．数の積，置換の積などを一般化した概念として**二項演算**がある．また，上の**問 (置換の結合法則)** を考える上でも (数学では) **集合**と**写像**の概念が必須である．

• 「関数」の概念を一般の集合 (=ものの集まり，数の集まりである必要はない) 上に一般化することで「写像」の概念が得られる．

定義 (写像)(参 p.18)**．** X, Y を空でない集合とする．X の任意の元 (=要素) x に Y の元 $y = f(x)$ を対応させる規則 (ルール) f のことを X から Y への写像 (map) といい，$f : X \longrightarrow Y$ とかく．特に，各元の対応を表すときには，

$$\begin{array}{cccc} f : & X & \longrightarrow & Y, \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & x & \longmapsto & y = f(x), \end{array} \qquad f : X \ni x \longmapsto y = f(x) \in Y, \qquad f : X \longrightarrow Y,\ x \longmapsto y = f(x)$$

等と書く．特に，X, Y が $\mathbb{R}$ や $\mathbb{C}$ など数の場合には**関数**と呼ぶ．($\leftarrow$ 二種類の矢印 ($\longrightarrow$, $\longmapsto$)，コロン (:) の使い方には十分に注意すること．例えば，コロン (:) をセミコロン (;) にしてはいけない.)

定義 (合成写像)(参 p.19)**．** 2つの写像 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ に対して，X の元 x を f で移した値 $f(x) \in Y$ を，さらに g で $g(f(x)) \in Z$ にうつす写像を f と g の**合成写像** (composite map) といい $g \circ f$ で表す：$(g \circ f)(x) = g(f(x))$．すなわち，

$$g \circ f : X \ni x \longmapsto g(f(x)) \in Z.$$

例 (合成写像)． 3つの集合 $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$, $Z = \{¥, 0\}$ に対して，写像 $f : X \to Y$ と $g : Y \to Z$ を

$$f(a) = 2,\ f(b) = 3,\ f(c) = 2, \qquad g(1) = ¥,\ g(2) = 0,\ g(3) = 0$$

と定義する．このとき，合成写像 $g \circ f$ は $g \circ f : X \to Z,\ a \mapsto 0,\ b \mapsto 0,\ c \mapsto 0$ で与えられる．

命題 (写像の合成の結合法則)． 写像 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $h : Z \to W$ に対して，次が成り立つ:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) : X \to W.$$

• 写像 $X \to Y$ が分かりやすいのは,「X の別々の元はそれぞれ Y の別々の元に移る」場合や「Y の全ての元は X から移ってくる」場合で，そのような (直感的な) イメージは，数学では次のように定義 (表現) する ($\leftarrow$ イメージでは数学 (証明) はできないので，厳密な定義が必要！)：

定義 (単射)(参 p.19)**.** 写像 $f : X \to Y$ が**単射** (injective) であるとは，任意の $x_1, x_2 \in X$ に対して，$x_1 \neq x_2$ ならば $f(x_1) \neq f(x_2)$ が成り立つことである．

• 対偶をとれば，写像 $f : X \to Y$ が**単射**であるとは，任意の $x_1, x_2 \in X$ に対して，「$f(x_1) = f(x_2)$ ならば $x_1 = x_2$」が成り立つこととも言える．

定義 (全射)(参 p.19)**.** 写像 $f : X \to Y$ が**全射** (surjective) であるとは，任意の $y \in Y$ に対して，$f(x) = y$ となる $x \in X$ が存在することである．

定義 (全単射)(参 p.19)**.** 写像 $f : X \to Y$ が**全単射**であるとは，全射かつ単射であることである．

定義 (逆写像)(参 p.21)**.** 写像 $f : X \to Y$ を全単射とする．このとき，(全射より) 任意の $y \in Y$ に対して，ある $x \in X$ が存在して $f(x) = y$ を満たし，またそのような $x \in X$ は (単射より) 一意的 (= 唯一つ) に定まる．この $y \in Y$ に対して，$x \in X$ を対応させる写像を f の**逆写像** (inverse map) といい f^{-1} で表す．すなわち，$f^{-1} : Y \to X,\ f(x) = y \mapsto x$ である．

定義 (二項演算)． 集合 X に対して，写像 $f : X \times X \to X,\ (a, b) \mapsto a \circ b := f(a, b)$ を X 上の**二項演算** (または**演算**) といい，$a \circ b := f(a, b)$ を a と b の積という．この $\circ$ を単に二項演算と呼ぶこともある．集合 X 上に二項演算 $\circ$ が与えられている (=定義されている) ことを $(X, \circ)$ と表す．

例 (二項演算)． (i) n 次対称群 S_n と置換の積 $\sigma \circ \tau$ に対して，$\circ$ は S_n 上の二項演算である：$(S_n, \circ)$.
(ii) 通常の加減乗除に対して，$(\mathbb{Q}, +), (\mathbb{Q}, -), (\mathbb{Q}, \times), (\mathbb{Q}, \div)$ は二項演算が与えられた集合の例である．しかし，$\mathbb{N}$ に対する減法と除法

$$- : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad (a, b) \mapsto a - b, \qquad\qquad \div : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad (a, b) \mapsto \frac{a}{b}$$

は二項演算**ではない**ことに注意すること．($\leftarrow$ なぜか考える！)

命題 (置換の定義の再考)． n 文字 $I_n := \{1, 2, \ldots, n\}$ の置換を 1 つ与えることは，I_n から I_n への全単射である写像を 1 つ与えると同じである．よって I_n の置換全体のなす集合 n **次対称群** S_n は

$$S_n = \{\sigma : I_n \to I_n \,|\, \sigma は全単射\} \left(= \left\{ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ i_1 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \,\middle|\, \{i_1, \ldots, i_n\} は \{1, \ldots, n\} の並べ替え \right\} \right)$$

と表せ，置換の積 $\sigma \circ \tau$ (=S_n 上の二項演算) は合成写像 $(\sigma \circ \tau)(i) = \sigma(\tau(i)),\ i \in I_n$ に他ならない．

演習問題 (小テスト・中間テストの予想問題)　([**1**] は p.7)

[**2**] **(単射でない)** 写像 $f : X \to Y$ が**単射でない**ということは，どのようなことか？ある写像が**単射でない**ことを示すには，何を示す必要があるか？(ヒント「ある〜が存在して」を用いる)

[**3**] **(全射でない)** 写像 $f : X \to Y$ が**全射でない**ということは，どのようなことか？ある写像が**全射でない**ことを示すには，何を示す必要があるか？(ヒント「ある〜が存在して」を用いる)

[**4**] 3 文字の集合 $I_3 := \{1, 2, 3\}$ に対して，写像 $\sigma : I_3 \to I_3$ を $\sigma(1) = 2,\ \sigma(2) = 3,\ \sigma(3) = \boxed{?}$ として定義する．この写像が単射，全射，全単射となる為にはそれぞれ $\boxed{?}$ をどう取ればよいか？

[**5**] $X = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ のそれぞれに対して，次の写像は単射，全射，全単射かどうかを判定せよ．
(i) $f : X \to X,\ x \mapsto 3x$, (ii) $f : X \to X,\ x \mapsto x^3$.

[**6**] (i) 全単射 $f : X \to Y$ の逆写像 f^{-1} に対して，$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X,\ f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y$ が成り立つことを確かめよ．但し，$\mathrm{id}_X : X \to X$ は任意の $x \in X$ に対して $\mathrm{id}_X(x) = x$ なる写像，すなわち x に x そのものを対応させる写像であり，X の恒等写像とよばれる (id_Y についても同様).
(ii) 写像 $f : X \to Y$ と $g : Y \to X$ が $g \circ f = \mathrm{id}_X$ をみたすとき，f は単射かつ g は全射を示せ．これを用いて，$g \circ f = \mathrm{id}_X$ かつ $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ ならば f と g は全単射で $g = f^{-1}$ を示せ．