

代数序論 B (第1回・2012/04/12)

授業の目標 .

次年度から本格的に始まる, 代数のいくつかの話題を先取りして学び, まずはその概念の存在を知って慣れること. 毎回, 具体例を中心に今後代数の授業で出てくる事柄を取り上げ, 特に分かりにくい部分を学生同士で議論して考える. さらに解説を加えて, 理解を深める事を目標とする.

授業のねらい .

次年度から始まる代数の授業では, これまでになかったような抽象的概念, (現代的な数学の) 新しい考え方が多く出てくる. そのため, 困惑し, 十分な理解が得られない学生も少なくない. 多くの新しい概念のうち, キーポイントとなるものをこの授業で取り上げ, 先に学んでおくことによって, 今後の代数の授業におけるつまづきを少しでも減らし, 理解を深める為の手助けを行う.

授業の進め方 .

①通常の授業 部分と②グループワーク からなる.

①と②でメリハリを付ける必要がある. 特に, ①の授業時は私語厳禁!!

グループワーク時は, 3-4 人のグループに分かれて, グループ毎にディスカッションを行い, 学生同士の意見交換を通じて, その理解を深める. また, 適宜, 他のグループに対して発表を行う.

授業の予定 .

回	木 2	10:40-10:50	10:50-12:10
1	4/12	イントロダクション	
2	4/19	小テスト	あみだくじと置換 (集合の元, 写像 (置換) の合成, 直積集合, 二項演算)
3	4/26	小テスト	集合と写像 (全射・単射・全単射)・置換の定義の再考
4	5/10	小テスト	群 (置換群) とその同型 (群表による定義)・群表の考察 (部分群・巡回群)
5	5/17	小テスト	二項係数と二項定理 (パスカルの三角形とフラクタル・フィボナッチ数)
6	5/24	小テスト	数学的帰納法 (予想を立てて証明・二項定理・べき乗和公式・ベルヌーイ数)
7	5/31	小テスト	論理の練習 (「任意の」「存在する」とその否定, ε - δ 論法, 背理法)
8	6/7	中間試験	
9	6/14	小テスト	群の定義とその具体例 (置換群, 巡回群, 二面体群, 行列群)
10	6/21	小テスト	準同型写像と群の同型の再考 (集合間の写像とその解釈)
11	6/28	小テスト	ユークリッドの互除法・互いに素な数の特徴付け (最大公約数・最小公倍数)
12	7/5	小テスト	同値関係と合同・同値類による類別 (クラス分け), 例: 相似変換と不変量
13	7/12	小テスト	剰余群 (商群, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$) と well-defined・有限体の世界・フェルマーの小定理
14	7/19	小テスト	3 次方程式の解 (二分法・ニュートン法) と解の公式・ガロア理論への道
15	7/26	期末試験	

教科書 .

佐藤文広著「これだけは知っておきたい数学ビギナーズマニュアル」日本評論社.

参考文献 .

鈴木晋一著「集合と位相への入門」サイエンス社 (= 参考書).

碓文夫著「論理と代数の基礎」培風館 (この他にも, 授業中に適宜紹介する.)

成績評価方法 .

毎回の小テスト・グループワーク・レポート・2 回の試験 (中間, 期末) によって総合的に評価する.

小テスト 10 点 $\times$ 12 = 120 点

グループワーク 40 点

レポート 40 点

中間試験 100 点

期末試験 100 点

グループワーク, 及び授業中に与えられるレポート課題の出来が極端に良い場合, 期末試験の得点がこれまでに比べて顕著によかった場合, さらにボーナス点を加点する場合がある.

Web と e-mail の連絡先 .

<http://www2.rikkyo.ac.jp/web/hoshi/>

hoshi アット rikkyo.ac.jp (アットには@が入ります).

定義 (集合) . 集合とは, そのメンバーであるか (属しているか) 否かを一意 (unique) に判定できるようなものの集まりのこと. (← 「一意」については教科書 p.35 を見ること)

定義 (要素, 元) . 集合 S に属するメンバーを, その集合の元, または要素といい,

x が S の元であることを $x \in S$, (← 「 x は S に属する (含まれる) と読む」)

x が S の元でないことを $x \notin S$ と書く. (← 「 x は S に属さない (含まれない) と読む」)

集合の例 (教科書 pp.15–16, p.22) .

- $\mathbb{N}$ 自然数全体の集合 自然数 = natural numbers
- $\mathbb{Z}$ 整数全体の集合 整数 = integers, Zahlen (ドイツ語 ganze Zahlen)
- $\mathbb{Q}$ 有理数全体の集合 有理数 = rational numbers だが quotient (分数) の q ($\mathbb{R}$ と区別する為)
- $\mathbb{R}$ 実数全体の集合 実数 = real numbers
- $\mathbb{C}$ 複素数全体の集合 複素数 = complex numbers

• 例えば, $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ であるが $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. $\sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$ であるが $\sqrt{-1} \in \mathbb{C}$ など .

集合の表記 (参考書 p.10) . 集合の表し方には, 要素を書き並べる方法 (外延的記法)

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

と, 要素であるための条件を書く方法 (内包的記法) がある:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}.$$

• 例えば, $S = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ は } 12 \text{ の約数} \}$.

定義 (部分集合) (参 p.11) . 集合 B のいくつかの元からなる集合 A を, B の部分集合 (subset) と言い, $A \subset B$ と書く (A は B に含まれるともいう) . すなわち, A が B の部分集合であるとは,

任意の (すべての) $x \in A$ に対して, $x \in B$

が成り立つことである (← なぜか? 各自考える! 「任意の」については, 教科書 p.35 を見ること). A が B の部分集合でないとき $A \not\subset B$ と書く. $A \subset B$ かつ $B \subset A$ のとき, 集合 A と B は等しいと言い, $A = B$ と書く.

定義 (空集合) (参 p.13) . 要素を1つも含まないものの集まりも1つの集合とみなし, 空集合と呼んで記号 $\emptyset$ で表す. (← 定義から空集合はどんな集合に対してもその部分集合となる)

• 例えば, $S = \{0, 1\}$ の部分集合は $\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\} = S$ の4つ.

定義 (和集合, 共通部分, 差集合, 補集合) (参 p.12) . 集合 U の部分集合 A, B に対して,

$A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ または } x \in B\}$; A と B の和集合 (union)

$A \cap B := \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B\}$; A と B の共通部分 (intersection)

$A - B := \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \notin B\}$; 差集合 (difference set)

$A^c := \{x \in U \mid x \notin A\}$; A の (U 中での) 補集合 (complement)

と定義する. (← $X := Y$ は Y で X を定義するという意味). 差集合 $A - B$ を $A \setminus B$ とも書く.

定義 (直積集合) (参 p.16) . n 個の集合 $A_1, \dots, A_n$ に対して, A_i の要素 $a_i \in A_i$ を順番に並べた組 $(a_1, \dots, a_n)$ 全体の集合

$$\{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in A_i, (i = 1, \dots, n)\}$$

を $A_i, (i = 1, \dots, n)$ の直積集合 (direct product) といい $A_1 \times \dots \times A_n$ と書く.

• 例えば, 平面 $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ は直積集合.