

代数序論 A (第7回・2012/05/31) 小テスト

| | | | |
|------|--|----|--|
| 学籍番号 | | 氏名 | |
|------|--|----|--|

[1] 0以上の整数 $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ と $0 \leq k \leq n$ に対して, 二項係数は次で定義される:

$$\binom{n}{k} := \boxed{}$$

[2] $n \in \mathbb{N}$ と $1 \leq k \leq n$ に対して, 以下を示せ:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

[証明]

[3] (二項定理) (3点) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, 以下が成り立つことを数学的帰納法を用いて示せ:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

[証明]

[4] (3点) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, 以下が成り立つことを数学的帰納法を用いて示せ:

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

[証明]

[5] (2点) $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ をフィボナッチ数列とする. ビネの公式によって,

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} \text{ である. 但し, } \alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

$-\frac{1}{2} < \frac{\beta}{\alpha} < 0$ より, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n = 0$ であることを用いて, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ を示せ.

[証明]