

代数序論 B (第 5 回・2012/05/17) 小テスト

学籍番号		氏名	
------	--	----	--

[1] X, Y を空でない集合とする．次の を埋めて全射, 単射の定義を完成させよ．

但し, 「任意の \sim に対して」「 \sim が存在する (して)」を用いること．

(i) (2 点) 写像 $f : X \rightarrow Y$ が全射であるとは,

ことである．

(ii) (2 点) 写像 $f : X \rightarrow Y$ が単射であるとは,

が成り立つことである．

[2] 二項演算 \circ が与えられた有限集合 $X = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ に対し, その二項演算の対応を以下の様に表にしたものを, (X, \circ) の演算表と呼んだ:

\circ	a_1	a_2	\dots	a_j	\dots	a_n
a_1	$a_1 \circ a_1$	$a_1 \circ a_2$		\vdots		$a_1 \circ a_n$
a_2	$a_2 \circ a_1$	$a_2 \circ a_2$		\vdots		$a_2 \circ a_n$
\vdots				\vdots		\vdots
a_i	\dots	\dots	\dots	$a_i \circ a_j$		\vdots
\vdots						\vdots
a_n	$a_n \circ a_1$	$a_n \circ a_2$	\dots	\dots	\dots	$a_n \circ a_n$

3 次対称群 S_3 の元 $\sigma, \tau \in S_3$ には, 置換の積 $\sigma \circ \tau$ が写像の合成 $\sigma \circ \tau(i) := \sigma(\tau(i)), i \in \{1, 2, 3\}$ によって定義されていた．以下の空欄部分を埋め, (S_3, \circ) の演算表を完成させよ．但し,

$$S_3 = \{(1), a, b, c, d, e\}, \quad a = (1\ 2\ 3), \quad b = (1\ 3\ 2), \quad c = (1\ 2), \quad d = (1\ 3), \quad e = (2\ 3)$$

とし, 空欄の中には必ず $(1), a, b, c, d, e$ のどれかを入れること．

\circ	(1)	a	b	c	d	e
(1)	(1)	a	b	c	d	e
a	a			d	e	c
b	b			e	c	d
c	c			(1)	b	a
d	d				(1)	b
e	e					(1)

[3] 任意の置換 $\sigma \in S_n$ に対して,

$$\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = (1)$$

を満たす置換 $\sigma^{-1} \in S_n$ が存在し, σ の逆置換という．例えば, $a = (1\ 2\ 3)$ の逆置換は $b = (1\ 3\ 2)$ であり, $c = (1\ 2)$ の逆置換は $c = (1\ 2)$ 自身である．

さて, 問 [2] の演算表には, 各行各列に, 必ず (1) が現われる．それがなぜかを説明せよ．