

はじめに (線形代数 IIA)

線形代数 II = 線形代数 I のつづき

教科書 「やさしい線形代数, H. アントン著, 山下純一訳」 現代数学社

講義の情報 <http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~hoshi/teaching-j.html>

シラバス [LINK](#)

- ▶ ノートを取りながら講義を聴くこと.
(ノートを回収して確認する可能性があります)
- ▶ 講義 → 小テスト (理解度確認テスト, 学務情報システム内)

4.2 線形空間

注意

教科書では「線型」を使っているが、この授業では「線形」を使う。
「線型空間」→「線形空間」

V : 集合

n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n \rightsquigarrow V$: 線形空間
一般化

注意

$\exists!$ は「一意的 (ただ一つ) に存在」 ($\exists 1$ も同様)
 $\exists \sim \text{s.t.} \dots$ の s.t. は such that の略で $\dots$ をみたすような

定義 (線形空間 V) [$\mathbb{C}$ 上や体 K 上もあるがこの授業では扱わない]

V : 集合, $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V, \forall k, l \in \mathbb{R}$ が次の 10 個の公理をみたすとき, V を ($\mathbb{R}$ 上の) 線形空間, 元 $\mathbf{u} \in V$ を ベクトル という.

公理 1. $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, 和 $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$ が定義されている.

2. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ (交換法則)

3. $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$ (結合法則)

4. $\exists! \mathbf{0} \in V$ s.t. $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$

5. $\forall \mathbf{u} \in V \exists! -\mathbf{u} \in V$ s.t. $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = (-\mathbf{u}) + \mathbf{u} = \mathbf{0}$

($\mathbf{0}$ を ゼロ・ベクトル, $-\mathbf{u}$ を $\mathbf{u}$ の逆元 という)

公理 6. $\mathbf{u} \in V, k \in \mathbb{R}$, スカラー倍 $k\mathbf{u} \in V$ が定義されている.

7. $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$ (分配法則 1)

8. $(k + l)\mathbf{u} = k\mathbf{u} + l\mathbf{u}$ (分配法則 2)

9. $k(l\mathbf{u}) = (kl)\mathbf{u}$

10. $1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$

注意

$\mathbb{R}^n$ は公理 1~10 をみたし線形空間. (ほかにも色々な線形空間がある)

例

$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0\}$ 原点を通る $\mathbb{R}^3$ 内の平面は線形空間. (ベクトル (a, b, c) と直交する平面 $(a, b, c) \cdot (x, y, z) = 0$)

$\therefore \mathbb{R}^3$ は線形空間であり, $V \subset \mathbb{R}^3$ より V は公理 2,3,7,8,9,10 をみたす.
($\mathbb{R}^3$ 全体で成立)

(公理 1) $\mathfrak{u} = (u_1, u_2, u_3), \mathfrak{v} = (v_1, v_2, v_3) \in V$

$$\Rightarrow au_1 + bu_2 + cu_3 = 0, av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$$

$$\Rightarrow a(u_1 + v_1) + b(u_2 + v_2) + c(u_3 + v_3) = 0$$

$$\Rightarrow \mathfrak{u} + \mathfrak{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3) \in V.$$

(公理 4) $\mathfrak{0} = (0, 0, 0) \in V.$

(公理 5) $-\mathfrak{u} = (-u_1, -u_2, -u_3) \in V.$

$$(\because au_1 + bu_2 + cu_3 = 0 \Rightarrow a(-u_1) + b(-u_2) + c(-u_3) = 0)$$

(公理 6) $k\mathfrak{u} = (ku_1, ku_2, ku_3) \in V.$

$$(\because au_1 + bu_2 + cu_3 = 0 \Rightarrow a(ku_1) + b(ku_2) + c(ku_3) =$$

$$k(au_1 + bu_2 + cu_3) = k \cdot 0 = 0).$$

例

$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = at, y = bt, z = ct (t \in \mathbb{R})\}$ 原点を通る $\mathbb{R}^3$ 内の直線は線形空間.

$\therefore$ 省略. 上の例と同様. (各自考えてみる)

例

$V = M_{m,n} = \{ \text{実数成分の } m \times n \text{ 行列} \}$ は線形空間.

$\therefore$ 和 : 行列の和, ゼロ・ベクトル : 零行列 $\mathbf{O}$,

逆元 : A の逆元は $-A$, スカラー倍 : 行列のスカラー倍 kA .

例

$V = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ $\mathbb{R}$ 上の実数値関数全体は線形空間.

$\therefore$ 和 : $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$, ゼロ・ベクトル : $f = 0$,

逆元 : f の逆元は $-f$, スカラー倍 : $(kf)(x) := kf(x)$.

例

$V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0\}$ は線形空間でない.

$\because (1, 1) \in V$ だが逆元 $-(1, 1) = (-1, -1) \notin V$.

例

$V = \{0\}$ ゼロ・ベクトルからなる 1 点集合は線形空間.

例えば, $V = \{(0, 0, 0)\} \subset \mathbb{R}^3$.

例

$V = \{\text{実数列 } \{a_n\}\}$ 実数列全体は線形空間.

$\because a = \{a_n\}, b = \{b_n\}$ に対して,

和: $a + b := \{a_n + b_n\}$, ゼロ・ベクトル: $\{0\} = \{0, 0, 0, \dots\}$,

逆元: a の逆元は $-a := \{-a_n\}$, スカラー倍: $ka := \{ka_n\}$.

例

$V = \mathbb{R}[X] = \{f = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0 \mid a_i \in \mathbb{R}, n \geq 0\}$ 実数係数の
1 変数多項式全体は線形空間.

$\therefore$ 和 : 多項式の和 $f + g$, ゼロ・ベクトル : $0 \in \mathbb{R}$,
逆元 : f の逆元は $-f$, スカラー倍 : $kf \in V$.

例

$V = \mathbb{R}[X]_n = \{f = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0 \mid a_i \in \mathbb{R}\}$ n 次以下の実数
係数の 1 変数多項式全体は線形空間.

$\therefore$ 和 : 多項式の和 $f + g$, ゼロ・ベクトル : $0 \in \mathbb{R}$,
逆元 : f の逆元は $-f$, スカラー倍 : $kf \in V$.

▶ 教 pp.161~163 の練習問題 4.2 を各自やってみる

定理 3

V : 線形空間, $u \in V, k \in \mathbb{R}$.

- (a) $0 \cdot u = \mathbf{0}$. (b) $k \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$. (c) $(-1) \cdot u = -u$.
(d) $k \cdot u = \mathbf{0} \Rightarrow k = 0$ または $u = \mathbf{0}$.

(証明) (公理 1 から公理 10 のみを用いて示す)

(a) $0 \cdot u + 0 \cdot u \stackrel{\text{公理 8}}{=} (0+0) \cdot u = 0 \cdot u$. 公理 5 より $0 \cdot u$ の逆元 $-0 \cdot u$ が存在し, 両辺に足すと $(0 \cdot u + 0 \cdot u) + (-0 \cdot u) = 0 \cdot u + (-0 \cdot u) \stackrel{\text{公理 3,5}}{\Rightarrow}$

$$0 \cdot u + (0 \cdot u + (-0 \cdot u)) = \mathbf{0} \stackrel{\text{公理 5}}{\Rightarrow} 0 \cdot u + \mathbf{0} = \mathbf{0} \stackrel{\text{公理 4}}{\Rightarrow} 0 \cdot u = \mathbf{0}.$$

(b) $k \cdot \mathbf{0} \stackrel{\text{公理 4}}{=} k \cdot (\mathbf{0} + \mathbf{0}) \stackrel{\text{公理 7}}{=} k \cdot \mathbf{0} + k \cdot \mathbf{0}$. よって公理 5 より, $k \cdot \mathbf{0}$ の逆元 $-k \cdot \mathbf{0}$ をとれば (a) と同様. (c) $u + (-1) \cdot u \stackrel{\text{公理 10}}{=} 1 \cdot u + (-1) \cdot u$

$$\stackrel{\text{公理 8}}{=} (1-1) \cdot u = 0 \cdot u \stackrel{\text{公理 9}}{=} \mathbf{0}. \text{ よって, } -u = (-1) \cdot u.$$

(d) (背理法) $k \neq 0$ かつ $u \neq \mathbf{0}$ を仮定. $k \cdot u = \mathbf{0}$ の両辺に $\frac{1}{k}$ をかけて,
(左辺) $\frac{1}{k}(k \cdot u) \stackrel{\text{公理 9}}{=} 1 \cdot u \stackrel{\text{公理 10}}{=} u$

(右辺) $\frac{1}{k} \cdot \mathbf{0} \stackrel{(b)}{=} \mathbf{0}$. よって $u = \mathbf{0}$ となり矛盾. □