

はじめに (線形代数 IIA)

線形代数 II = 線形代数 I のつづき

教科書 「やさしい線形代数, H. アントン著, 山下純一訳」 現代数学社

講義の情報 <http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~hoshi/teaching-j.html>

シラバス [LINK](#)

- ▶ ノートを取りながら講義を聴くこと.
(ノートを回収して確認する可能性があります)
- ▶ 講義 → 小テスト (理解度確認テスト, 学務情報システム内)

4.3 部分空間

定義 (部分空間)

$W \subset V$ が V 上の和とスカラー倍を W に制限して線形空間をなすとき、 W を V の 部分空間 という。

例

$\{0\} \subset V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0\} \subset \mathbb{R}^3$: 部分空間.

$\{0\} \subset V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = at, y = bt, z = ct (t \in \mathbb{R})\} \subset \mathbb{R}^3$: 部分空間.

注意

V : 線形空間.

$W \subset V \Rightarrow W$ は公理 2, 3, 7, 8, 9, 10 をみたす.

よって, 公理 1, 4, 5, 6 のみチェックすればよい. さらに ...

定理 4

$W \subset V$: 部分空間 $\iff$

(a) $u, v \in W \Rightarrow u + v \in W$ (公理 1)

(W は 和について閉じている という)

(b) $u \in W, k \in \mathbb{R} \Rightarrow ku \in W$ (公理 6).

(W は スカラー倍について閉じている という)

$\therefore (\Rightarrow)$ 公理 1~10 をみたすので OK.

($\Leftarrow$) 上の注意より, 公理 4, 5 を示せばよい.

$w \in W$. (b) より, $0 \in \mathbb{R}$ で $0 \cdot u = \underset{\text{定理 3}}{0} \in W$ より公理 4 は OK.

$-1 \in \mathbb{R}$ で $(-1) \cdot u = \underset{\text{定理 3}}{-u} \in W$ より公理 5 も OK. □

注意

V : 線形空間

$\Rightarrow V, \{0\}$ の 2 つは (いつも) 部分空間であり, 自明な部分空間 という.

例

$M_{2,2} = M_{2,2}(\mathbb{R})$: 実数成分の 2×2 行列全体.

$W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset M_{2,2}$: 部分空間.

$\therefore A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix} \in W, k \in \mathbb{R}.$

$A + B = \begin{pmatrix} 0 & a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 & 0 \end{pmatrix} \in W, kA = \begin{pmatrix} 0 & ka_1 \\ kb_1 & 0 \end{pmatrix} \in W.$

よって, 定理 4 より OK.

例

$V = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$: $\mathbb{R}$ 上の実数値関数全体

$W = \mathbb{R}[X]_n$: n 次以下の多項式全体

$\Rightarrow W \subset V$: 部分空間.

$\therefore f, g \in W, k \in \mathbb{R}.$

$(f + g)(x) := f(x) + g(x), (kf)(x) := kf(x)$ により, $f + g, kf \in W.$

よって, 定理 4 より OK.

例

$V = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\} : \mathbb{R}$ 上の実数値関数全体

$W = C(-\infty, \infty) : \mathbb{R}$ 上の実数値連続関数全体.

$\Rightarrow W \subset V : \text{部分空間.}$

$\because f, g \in W, k \in \mathbb{R} \Rightarrow f + g, kf \in W$ と定理 4 より OK.

例

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m,n}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \text{ に対し}$$

て, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ は連立 1 次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

を表す. $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ のとき, $W = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\} \subset \mathbb{R}^n : \text{部分空間.}$

例

$W = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\} \subset \mathbb{R}^n$: 部分空間.

$\because \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in W, k \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{0}, A\mathbf{x}' = \mathbf{0}$

$\Rightarrow A(\mathbf{x} + \mathbf{x}') = A\mathbf{x} + A\mathbf{x}' = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$. よって, $\mathbf{x} + \mathbf{x}' \in W$.

$A(k\mathbf{x}) = k(A\mathbf{x}) = k \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ より, $k\mathbf{x} \in W$. 定理 4 より OK. □

注意

$W = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$ は $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の 解空間 とよばれる.

(解全体が線形空間になっている!! $\mathbb{R}^n$ の部分空間)

定義 (1 次結合でかける)

ベクトル $\mathbf{w} \in V$ がベクトル $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r \in V$ を用いて,
 $\mathbf{w} = k_1 \mathbf{v}_1 + \dots + k_r \mathbf{v}_r$ とかけるとき,
 $\mathbf{w}$ は $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$ の 1 次結合でかける という。

例

$\mathbf{u} = (1, 2, -1), \mathbf{v} = (6, 4, 2) \in \mathbb{R}^3$.

$\mathbf{w} = (9, 2, 7)$ は $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ の 1 次結合でかける。

$\mathbf{w}' = (4, -1, 8)$ は $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ の 1 次結合でかけない。

$\therefore \mathbf{w} = k_1 \mathbf{u} + k_2 \mathbf{v}$ とすると,

$$(9, 2, 7) = k_1(1, 2, -1) + k_2(6, 4, 2)$$

$$= (k_1 + 6k_2, 2k_1 + 4k_2, -k_1 + 2k_2).$$

これを解くと, $k_1 = -3, k_2 = 2$. すなわち, $\mathbf{w} = -3\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$.

$\mathbf{w}' = k_1 \mathbf{u} + k_2 \mathbf{v}$ とすると,

$$(4, -1, 8) = k_1(1, 2, -1) + k_2(6, 4, 2)$$

$= (k_1 + 6k_2, 2k_1 + 4k_2, -k_1 + 2k_2)$ の解はない. (各自)

