はじめに　(線形代数 IIA)

$\boxed{\text{線形代数 II} \quad = \quad \text{線形代数 I のつづき}}$

教科書　「やさしい線形代数，H．アントン著，山下純一訳」現代数学社

講義の情報　http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~hoshi/teaching-j.html

シラバス　LINK

- ノートを取りながら講義を聴くこと．
  (ノートを回収して確認する可能性があります)
- 講義 $\longrightarrow$ 小テスト (理解度確認テスト，学務情報システム内)

定義 (V を張る)

任意の $\mathbb{v} \in V$ が $\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_r \in V$ の 1 次結合でかけるとき，
i.e. $\mathbb{v} = k_1\mathbb{v}_1 + \cdots + k_r\mathbb{v}_r$, (i.e. $\cdots$ すなわち)
$\underline{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_r \text{ は } V \text{ を張る}}$ といい， $V = \mathcal{L}\{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_r\}$,
$V = \mathrm{Span}\{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_r\}$, $V = \langle \mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_r \rangle_{\mathbb{R}}$ などとかく．以降，
$V = \mathrm{Span}\{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_r\}$ とかく．

例

$\mathbb{i} = (1,0,0), \mathbb{j} = (0,1,0), \mathbb{k} = (0,0,1)$ は $\mathbb{R}^3$ を張る : $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Span}\{\mathbb{i}, \mathbb{j}, \mathbb{k}\}$.
$\because$ 任意の $\mathbb{v} = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ は $\mathbb{v} = a\,\mathbb{i} + b\,\mathbb{j} + c\,\mathbb{k}$ とかける．

例

$\mathbb{R}[X]_n = \mathrm{Span}\{1, X, \ldots, X^n\}$.
$\because$ 任意の $f \in \mathbb{R}[X]$ は $f = a_0 \cdot 1 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$ とかける．

例

$\mathbb{v}_1=(1,1,2)$, $\mathbb{v}_2=(1,0,1)$, $\mathbb{v}_3=(2,1,3)\in\mathbb{R}^3$ は $\mathbb{R}^3$ を張るか？
つまり，$\mathbb{R}^3=\mathrm{Span}\{\mathbb{v}_1,\mathbb{v}_2,\mathbb{v}_3\}$？
任意の $\mathbb{b}=(b_1,b_2,b_3)\in\mathbb{R}^3$ は $\mathbb{b}=k_1\mathbb{v}_1+k_2\mathbb{v}_2+k_3\mathbb{v}_3$ とかけるか？
$\mathbb{b}=(k_1+k_2+2k_3,k_1+k_3,2k_1+k_2+3k_3)$．つまり，

$$\begin{cases} k_1+k_2+2k_3=b_1 \\ k_1 \qquad\ \ +k_3=b_2 \\ 2k_1+k_2+3k_3=b_3 \end{cases}$$

が解をもつか？　これは，$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

として，$A\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ とかける．A：正則行列 $\Rightarrow$ 解あり：

$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$．しかし，$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}=$
$0+2+2-0-1-3=0$ より，解 (k_1,k_2,k_3) がないような $\mathbb{b}$ が存在する．よって，$\mathbb{R}^3\neq\mathrm{Span}\{\mathbb{v}_1,\mathbb{v}_2,\mathbb{v}_3\}$.

定義

$\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_r \in V$.
$\mathrm{Span}\{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_r\} := \{k_1\mathbb{v}_1 + \cdots + k_r\mathbb{v}_r \mid k_i \in \mathbb{R}\} \subset V$
$\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_r$ によって張られる (線形) 空間 という.

定理 5

V：線形空間，$\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_r \in V$.
(a) $W = \mathrm{Span}\{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_r\} \subset V$：部分空間.
(b) $W = \mathrm{Span}\{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_r\}$ は $\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_r$ を含む V の最小の部分空間.
（すなわち，$W' \subset V$：部分空間，$\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_r \in W' \Rightarrow W \subset W'$）

(証明) (a) 定理 4 から $\mathbb{u}, \mathbb{u}' \in W \Rightarrow \mathbb{u} + \mathbb{u}' \in W$, $k\mathbb{u} \in W$ を示せばよい.
$\mathbb{u}, \mathbb{u}' \in W \Rightarrow \mathbb{u} = \exists c_1\mathbb{v}_1 + \cdots + \exists c_r\mathbb{v}_r, \mathbb{u}' = \exists c_1'\mathbb{v}_1 + \cdots + \exists c_r'\mathbb{v}_r$
$\Rightarrow \mathbb{u} + \mathbb{u}' = (c_1 + c_1')\mathbb{v}_1 + \cdots + (c_r + c_r')\mathbb{v}_r \in W$,
$k\mathbb{u} = (kc_1)\mathbb{v}_1 + \cdots + (kc_r)\mathbb{v}_r \in W$ より OK.
(b) $W \ni \mathbb{v}_i$ に注意すると，$W' \subset V$：部分空間かつ $\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_r \in W'$
$\Rightarrow c_1\mathbb{v}_1 + \cdots + c_r\mathbb{v}_r \in W' \Rightarrow W = \mathrm{Span}\{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_r\} \subset W'$. □

- 教 p.171 例 20, pp.172–173 練習問題 4.3 を各自みておく.

4.4 1 次独立性

定義 (1 次独立，1 次従属)

ベクトル $\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_r \in V$ が 1 次独立 であるとは，$k_1, \ldots, k_r \in \mathbb{R}$ に対して，

$k_1\mathbb{v}_1 + \cdots + k_r\mathbb{v}_r = \mathbb{o} \Rightarrow k_1 = \cdots = k_r = 0$

をみたすこと．そうでないとき，1 次従属 という．

注意

$P \Rightarrow Q$ の否定は P かつ Q でない．

$\neg(P \Rightarrow Q) = P \wedge \neg Q$ ($\neg \cdots$ 否定)

注意

1 次従属である とは，

$k_1\mathbb{v}_1 + \cdots + k_r\mathbb{v}_r = \mathbb{o}$ かつ $(k_1, \ldots, k_r) \neq (0, \ldots, 0)$

なる $k_1, \ldots, k_r \in \mathbb{R}$ が存在すること．

すなわち，$\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_r$ が "1 次の関係式" をもつこと．

例

$\mathbb{v}_1 = (2, -1, 0, 3)$, $\mathbb{v}_2 = (1, 2, 5, -1)$, $\mathbb{v}_3 = (7, -1, 5, 8) \in \mathbb{R}^4$ は 1 次従属.
$\because\ 3\mathbb{v}_1 + \mathbb{v}_2 - \mathbb{v}_3 = (0, 0, 0, 0) = \mathbb{o}$.

例

$\mathbb{p}_1 = 1 - x$, $\mathbb{p}_2 = 5 + 3x - 2x^2$, $\mathbb{p}_3 = 1 + 3x - x^2 \in \mathbb{R}[x]$ は 1 次従属.
$\because\ 3\mathbb{p}_1 - \mathbb{p}_2 + 2\mathbb{p}_3 = 0$.

例

$\mathbb{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbb{j} = (0, 1, 0)$, $\mathbb{k} = (0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$ は 1 次独立.
$\because\ k_1\mathbb{i} + k_2\mathbb{j} + k_3\mathbb{k} = \mathbb{o} \Rightarrow (k_1, k_2, k_3) = \mathbb{o} \Rightarrow k_1 = k_2 = k_3 = 0$.

例

$\mathbb{v}_1 = (1, -2, 3)$, $\mathbb{v}_2 = (5, 6, -1)$, $\mathbb{v}_3 = (3, 2, 1) \in \mathbb{R}^3$ は
1 次独立か？1 次従属か？
$k_1\mathbb{v}_1 + k_2\mathbb{v}_2 + k_3\mathbb{v}_3 = \mathbb{o}$ とする．つまり，
$(k_1 + 5k_2 + 3k_3, -2k_1 + 6k_2 + 2k_3, 3k_1 - k_2 + k_3) = (0, 0, 0)$ であり，
連立 1 次方程式

$$\begin{cases} k_1 + 5k_2 + 3k_3 = 0 \\ -2k_1 + 6k_2 + 2k_3 = 0 \\ 3k_1 - k_2 + k_3 = 0 \end{cases}$$

を解くと，$(k_1, k_2, k_3) = (-\frac{1}{2}t, -\frac{1}{2}t, t)$ $(t \in \mathbb{R})$.
よって，$\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \mathbb{v}_3$ は 1 次従属.

注意

$\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_r \in V$ が "1 次従属"
$\iff \exists (k_1, \ldots, k_r) \neq (0, \ldots, 0)$ s.t. $k_1\mathbb{v}_1 + \cdots + k_r\mathbb{v}_r = \mathbb{o}$.
よって，$k_1 \neq 0$ とすると，これは

$$\mathbb{v}_1 = (-\frac{k_2}{k_1})\mathbb{v}_2 + \cdots + (-\frac{k_r}{k_1})\mathbb{v}_r$$

と $\mathbb{v}_1$ が $\mathbb{v}_2, \ldots, \mathbb{v}_r$ の 1 次結合でかけることをあらわしている.

定理 6

$\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_r \in \mathbb{R}^n$. $r > n \Rightarrow \mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_r$ は 1 次従属.

(証明) $\mathbb{v}_i = (v_{i1}, \ldots, v_{in})$ $(i = 1, \ldots, r)$ として，$k_1\mathbb{v}_1 + \cdots + k_r\mathbb{v}_r = \mathbb{o}$ を考えると，方程式

$$\begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & v_{r1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{1n} & \cdots & v_{rn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

をえるが，未知数の数 $= r > n =$ 方程式の数より，
$(k_1, \ldots, k_r) \neq (0, \ldots, 0)$ なる解をもつ．(教 p.31 定理 1)