

はじめに (線形代数 IIA)

線形代数 II = 線形代数 I のつづき

教科書 「やさしい線形代数, H. アントン著, 山下純一訳」 現代数学社

講義の情報 <http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~hoshi/teaching-j.html>

シラバス [LINK](#)

- ▶ ノートを取りながら講義を聴くこと。
(ノートを回収して確認する可能性があります)
- ▶ 講義 → 小テスト (理解度確認テスト, 学務情報システム内)

例

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & -4 \end{pmatrix}$ の列空間 $C(A)$ の基底を構成せよ。

前回の行空間 $R(A)$ に対して、**行 \leftrightarrow 列** とする。 (**転置する**)

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{行基本変形で} \\ \text{ガウス行列に})$$

$\therefore (1, 3, 0), (0, 1, 2) : R(A^t)$ の基底 (前回の定理 11 より)

$$\therefore \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} : C(A) \text{ の基底}$$

定理 12

$$\dim R(A) = \dim C(A).$$

(証明) $R(A) = \text{Span}\{r_1, \dots, r_m\}$ の基底を b_1, \dots, b_l

$$(\mathbf{b}_i = (b_{i1}, \dots, b_{il})) \text{ とすれば, } \begin{cases} r_1 = c_{11}b_1 + \dots + c_{1l}b_l \\ \vdots \\ r_m = c_{m1}b_1 + \dots + c_{ml}b_l. \end{cases}$$

つまり, $1 \leq \forall j \leq n$ に対して, $\begin{cases} a_{1j} = c_{11}b_{1j} + \dots + c_{1l}b_{lj} \\ \vdots \\ a_{mj} = c_{m1}b_{1j} + \dots + c_{ml}b_{lj} \end{cases}$ であり,

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = b_{1j} \begin{pmatrix} c_{11} \\ \vdots \\ c_{m1} \end{pmatrix} + \dots + b_{lj} \begin{pmatrix} c_{1l} \\ \vdots \\ c_{ml} \end{pmatrix} \text{ より, } \dim C(A) \leq \dim R(A) = l.$$

以上の議論を $A \rightarrow A^t$ とすれば,

$$\dim R(A) = \dim C(A^t) \leq \dim R(A^t) = \dim C(A).$$

$$\therefore \dim R(A) = \dim C(A).$$



定義 (階数)

$\dim R(A)$ ($= \dim C(A)$) を行列 A の階数といい, $\text{rank}(A)$ とかく.

注意

行列 A の階数 $\text{rank}(A)$ とは, A を行基本変形してガウス行列にしたときの階段の数(先頭の 1, 初 1 の個数) に等しい.

定理 13

$A : n \times n$ 行列. 次の (a)~(h) は同値 :

- (a) A は可逆 (正則) ;
- (b) $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ は $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 以外の解をもたない ;
- (c) A と単位行列 I_n は行同値 ;
- (d) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ は任意の \mathbf{b} について解をもつ ;
- (e) $\det(A) \neq 0$;
- (f) $\text{rank}(A) = n$;
- (g) A の行ベクトル $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n$ は 1 次独立 ;
- (h) A の列ベクトル $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n$ は 1 次独立 ;
- (c') A を行基本変形で既約ガウス行列にすると単位行列 I_n となる.

既約ガウス行列 ... 先頭の 1 の上下が全て 0. (c) \Leftrightarrow (c') は OK.

(証明) (a) \Leftrightarrow (b) \Leftrightarrow (c) \Leftrightarrow (d) は OK. (1.7 節, 定理 13, 教 p.65)

(a) \Leftrightarrow (e) も OK. (2.3 節, 定理 6, 教 p.91)

よって, (c) \Leftrightarrow (f) \Leftrightarrow (g) \Leftrightarrow (h) を示せばよい.

以下, (c) \Rightarrow (f) \Rightarrow (g) \Rightarrow (h) \Rightarrow (c') の順に示す.

(c) \Rightarrow (f) : $A \rightarrow \cdots \rightarrow I_n$ (行基本変形)

$\Rightarrow \dim R(A) = n \Leftrightarrow \text{rank}(A) = n.$

(f) \Rightarrow (g) : $\text{rank}(A) = n$

$\Leftrightarrow \dim R(A) = n \Rightarrow R(A) = \text{Span}\{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n\}$ より $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n$ は $R(A)$ の基底 (\because 定理 9(b)) $\Rightarrow \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n : 1$ 次独立.

(g) \Rightarrow (h) : $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n : 1$ 次独立

$\Rightarrow \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n$ は $R(A) = \text{Span}\{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n\}$ の基底 $\Rightarrow \dim R(A) = n$

$\Rightarrow \dim C(A) = n$ (\because 定理 12)

$\Rightarrow C(A) = \text{Span}\{\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n\}$ で $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n$ は 1 次独立.

(h) \Rightarrow (c') : $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n$ は 1 次独立

$\Rightarrow \mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n$ は $C(A) = \text{Span}\{\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n\}$ の基底 $\Rightarrow \dim C(A) = n$

$\Rightarrow \dim R(A) = n$ (\because 定理 12) $\Rightarrow A$ の既約ガウス行列の行ベクトルはすべて $\mathbf{0}$ でなく, 既約ガウス行列は I_n に等しい. □

定理 14

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ が解をもつ $\Leftrightarrow \mathbf{b} \in C(A)$.

(証明) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

よって、 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ が解をもつ $\Leftrightarrow \mathbf{b} \in C(A)$. □

▶ 教 pp.196~198 の練習問題 4.6 を各自やってみる