

はじめに (線形代数 IIA)

線形代数 II = 線形代数 I のつづき

教科書 「やさしい線形代数, H. アントン著, 山下純一訳」 現代数学社

講義の情報 <http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~hoshi/teaching-j.html>

シラバス [LINK](#)

- ▶ ノートを取りながら講義を聴くこと.
(ノートを回収して確認する可能性があります)
- ▶ 講義 → 小テスト (理解度確認テスト, 学務情報システム内)

定理 18

V : 内積空間, ($\cdots$ 内積空間とは内積が定義された線形空間のことだった)

$S = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$: V の正規直交基底 (正規直交集合かつ基底).

$\forall \mathbf{u} \in V$ に対して, $\mathbf{u} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \cdots + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_n \rangle \mathbf{v}_n$.

(証明) $\mathbf{u} = k_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + k_n \mathbf{v}_n \Rightarrow k_i = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_i \rangle$ ($i = 1, \dots, n$) を示す.

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_i \rangle = \langle k_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + k_n \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_i \rangle$$

$$= k_1 \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_i \rangle + \cdots + k_i \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle + \cdots + k_n \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_i \rangle$$

$$= k_1 \cdot 0 + \cdots + k_i \cdot 1 + \cdots + k_n \cdot 0 = k_i.$$

($\because \langle \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i \rangle = 0$ ($i \neq j$), $\|\mathbf{v}_i\| = 1$)

□

▶ 内積 $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle, \dots, \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_n \rangle$ を求めるだけで, 1 次結合の係数がわかる!

例

$$\mathbf{v}_1 = (0, 1, 0), \mathbf{v}_2 = (-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}), \mathbf{v}_3 = (\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}) \in \mathbb{R}^3.$$

$S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ は $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底. (各自確認する)

$\mathbf{u} = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$ は, $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle = 1, \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle = -\frac{1}{5}, \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_3 \rangle = \frac{7}{5}$ より,

$$\mathbf{u} = 1 \cdot \mathbf{v}_1 - \frac{1}{5} \cdot \mathbf{v}_2 + \frac{7}{5} \cdot \mathbf{v}_3.$$

定理 19

V : 内積空間. $S = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\} \subset V$ ($\mathbf{v}_i \neq \mathbf{0}$) : 直交集合
 $\Rightarrow \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ は 1 次独立.

(証明) $k_1 \mathbf{v}_1 + \dots + k_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0} \Rightarrow k_i = 0$ を示す.

$$k_1 \mathbf{v}_1 + \dots + k_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0} \Rightarrow \langle k_1 \mathbf{v}_1 + \dots + k_n \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_i \rangle = \langle \mathbf{0}, \mathbf{v}_i \rangle = 0$$

$$\Rightarrow k_1 \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_i \rangle + \dots + k_i \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle + \dots + k_n \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_i \rangle = 0$$

$$\Rightarrow k_1 \cdot 0 + \dots + k_i \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle + \dots + k_n \cdot 0 = 0 \Rightarrow k_i \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle = 0 \Rightarrow k_i = 0.$$

$$(\because \mathbf{v}_i \neq \mathbf{0} \text{ より } \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle = \|\mathbf{v}_i\|^2 \neq 0)$$



例

$$\mathbf{v}_1 = (0, 1, 0), \mathbf{v}_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}), \mathbf{v}_3 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \in \mathbb{R}^3.$$

$S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} \subset \mathbb{R}^3$ は正規直交集合. (前回)

定理 19 より, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ は 1 次独立.

よって, $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ と定理 9 より, S は $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底.

定理 20

V : 内積空間, $S = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\} \subset V$: 正規直交集合.

$W = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\} \Rightarrow \forall \mathbf{u} \in V$ は $\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$

$\mathbf{w}_1 := \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \dots + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_n \rangle \mathbf{v}_n \in W$

$\mathbf{w}_2 := \mathbf{u} - \mathbf{w}_1 = \mathbf{u} - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 - \dots - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_n \rangle \mathbf{v}_n \in W^\perp$

とかける. 但し, $W^\perp := \{\mathbf{v} \in V \mid \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0 \ (\forall \mathbf{w} \in W)\}$.

(証明) $\mathbf{w}_2 \in W^\perp$ を示せばよい. $W = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ より,
 $\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{v}_i \rangle = 0 \ (i = 1, \dots, n)$ を示せばよい. (定理 19 から S は W の基底)

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{v}_i \rangle &= \langle \mathbf{u} - \mathbf{w}_1, \mathbf{v}_i \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_i \rangle - \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{v}_i \rangle \\&= \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_i \rangle - \langle \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \dots + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_i \rangle \mathbf{v}_i + \dots + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_n \rangle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_i \rangle \\&= \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_i \rangle - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_i \rangle - \dots - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_i \rangle \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle - \dots - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_n \rangle \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_i \rangle \\&= \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_i \rangle - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle \cdot 0 - \dots - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_i \rangle \cdot 1 - \dots - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_n \rangle \cdot 0 = 0. \\(\because \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle &= 0 \ (i \neq j), \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle = \|\mathbf{v}_i\|^2 = 1)\end{aligned}$$

□

定理 20

V : 内積空間, $S = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$: 正規直交集合.

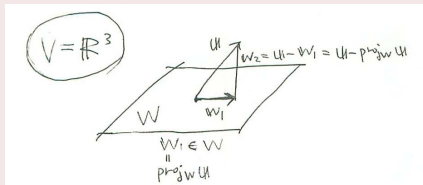
$W = \text{Span}\{v_1, \dots, v_n\} \Rightarrow \forall u \in V$ は $u = w_1 + w_2$

$w_1 := \langle u, v_1 \rangle v_1 + \dots + \langle u, v_n \rangle v_n \in W$

$w_2 := u - w_1 = u - \langle u, v_1 \rangle v_1 - \dots - \langle u, v_n \rangle v_n \in W^\perp$

とかける. 但し, $W^\perp := \{v \in V \mid \langle v, w \rangle = 0 \ (\forall w \in W)\}$.

注意と定義



$w_1 := \langle u, v_1 \rangle v_1 + \dots + \langle u, v_n \rangle v_n \in W$ を u の W への正射影 といい, $\text{proj}_W u$ とかく.

$w_2 := u - w_1 = u - \langle u, v_1 \rangle v_1 - \dots - \langle u, v_n \rangle v_n = u - \text{proj}_W u \in W^\perp$ を u の W に関する直交成分 という.

例

$$W = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} \subset \mathbb{R}^3$$

$$\mathbf{v}_1 = (0, 1, 0), \mathbf{v}_2 = (-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}), \mathbf{u} = (1, 1, 1) \text{ とすれば,}$$

$$\mathbf{w}_1 = \text{proj}_W \mathbf{u} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2$$

$$= 1 \cdot \mathbf{v}_1 + (-\frac{1}{5})\mathbf{v}_2 = (\frac{4}{25}, 1, -\frac{3}{25}) \in W : \mathbf{u} \text{ の } W \text{ への正射影.}$$

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{w}_1 = \mathbf{u} - \text{proj}_W \mathbf{u}$$

$$= (1, 1, 1) - (\frac{4}{25}, 1, -\frac{3}{25}) = (\frac{21}{25}, 0, \frac{28}{25}) \in W^\perp : \mathbf{u} \text{ の } W \text{ に関する直交成分}$$

定理 21 (グラム・シュミットの正規直交化法)

有限次元内積空間 $V \neq \{0\}$ は正規直交基底をもつ。

(証明) V : 内積空間, $\dim V = n > 0$. V の基底を 1 つとり, $u_1, \dots, u_n$ とする. この $u_1, \dots, u_n$ から正規直交基底 $v_1, \dots, v_n$ をつくる.

Step 1. $v_1 := \frac{u_1}{\|u_1\|}$ ($\Rightarrow \|v_1\| = 1$).

Step 2. v_1 に直交する $\|v_2\| = 1$ なる v_2 をつくる. それには, u_2 の $W_1 = \text{Span}\{v_1\}$ に関する直交成分 $u_2 - w_1 = u_2 - \text{proj}_{W_1} u_2$ を正規化して, $v_2 := \frac{u_2 - \text{proj}_{W_1} u_2}{\|u_2 - \text{proj}_{W_1} u_2\|} = \frac{u_2 - \langle u_2, v_1 \rangle v_1}{\|u_2 - \langle u_2, v_1 \rangle v_1\|}$ とすればよい.

Step 3. v_1, v_2 に直交する $\|v_3\| = 1$ なる v_3 をつくる. それには, u_3 の $W_2 = \text{Span}\{v_1, v_2\}$ に関する直交成分 $u_3 - w_2 = u_3 - \text{proj}_{W_2} u_3$ を正規化して, $v_3 := \frac{u_3 - \text{proj}_{W_2} u_3}{\|u_3 - \text{proj}_{W_2} u_3\|} = \frac{u_3 - \langle u_3, v_1 \rangle v_1 - \langle u_3, v_2 \rangle v_2}{\|u_3 - \langle u_3, v_1 \rangle v_1 - \langle u_3, v_2 \rangle v_2\|}$ とすればよい.

これを繰り返して, 正規直交基底 $v_1, \dots, v_n$ をえる. □

例

ユークリッド内積をもったユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ の基底

$\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1), \mathbf{u}_2 = (0, 1, 1), \mathbf{u}_3 = (0, 0, 1)$ から

グラム・シュミットの正規直交化法で正規直交基底 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ をつくる.

Step 1. $\mathbf{v}_1 := \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} = \frac{(1,1,1)}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}).$

Step 2. $\mathbf{v}_2 := \frac{\mathbf{u}_2 - \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1}{\|\mathbf{u}_2 - \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1\|}.$ ここで,

$$\mathbf{u}_2 - \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 = (0, 1, 1) - \frac{2}{\sqrt{3}}(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) = (-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \text{ より,}$$

$$\|\mathbf{u}_2 - \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1\| = \sqrt{(-\frac{2}{3})^2 + (\frac{1}{3})^2 + (\frac{1}{3})^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

$$\therefore \mathbf{v}_2 = \frac{3}{\sqrt{6}}(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = (-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}).$$

Step 3. $\mathbf{v}_3 := \frac{\mathbf{u}_3 - \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 - \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2}{\|\mathbf{u}_3 - \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 - \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2\|}.$ ここで,

$$\mathbf{u}_3 - \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 - \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 = (0, 0, 1) - \frac{1}{\sqrt{3}}(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) - \frac{1}{\sqrt{6}}(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}) = (0, 0, 1) - (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) - (-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}) = (0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \text{ より,}$$

$$\|\mathbf{u}_3 - \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 - \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2\| = \sqrt{0^2 + (-\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\therefore \mathbf{v}_3 = \sqrt{2}(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}).$$